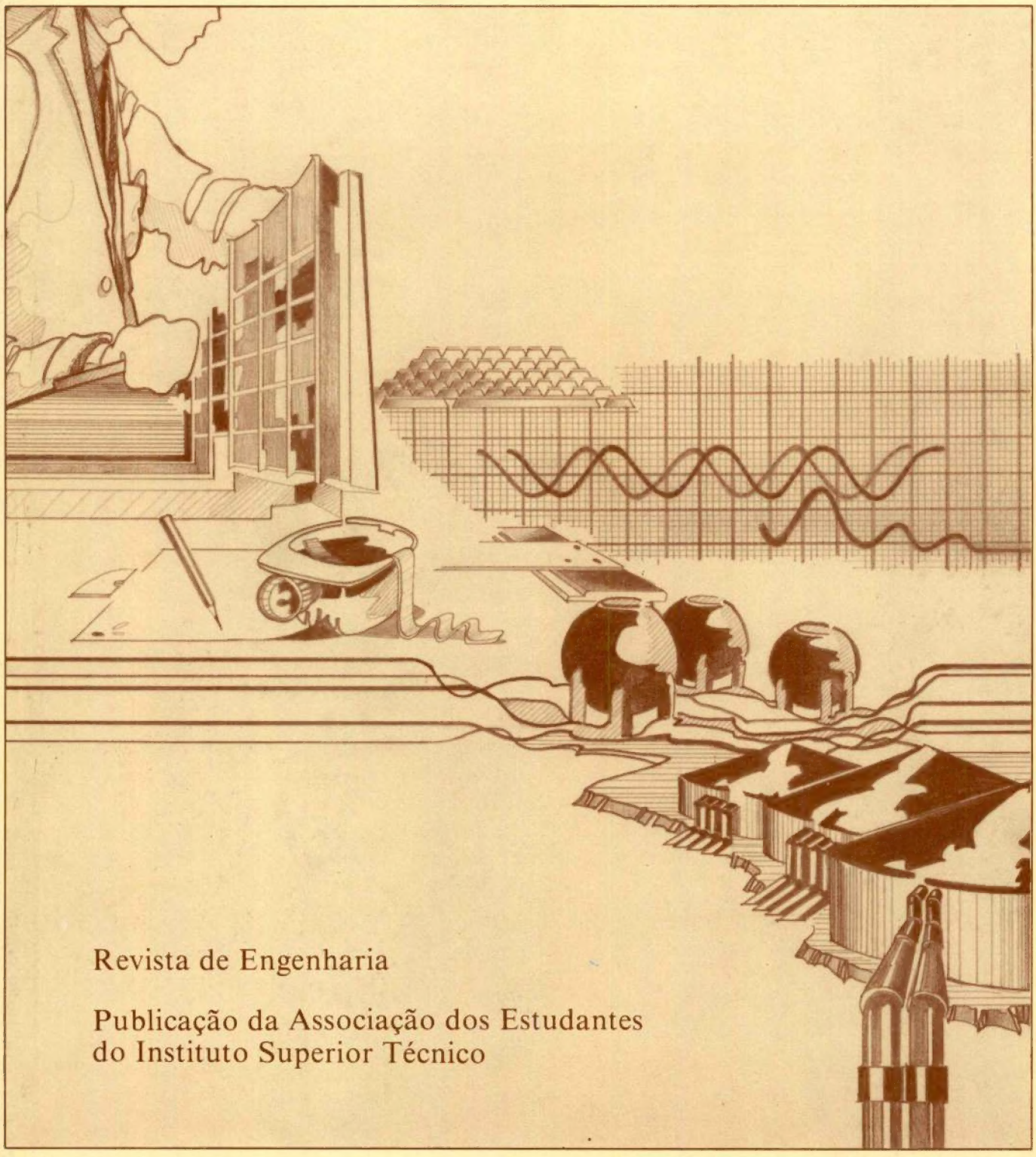
N.º duplo 1/2 • 85 • esc. 300$00
NOVEMBRO 1985

técnica



Revista de Engenharia

Publicação da Associação dos Estudantes
do Instituto Superior Técnico

técnica
revista de engenharia • aeist

PROPRIEDADE
DA ASSOCIAÇÃO DE ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DIRECTOR
M. DE ABREU FARO

COORDENADOR EDITORIAL
J. ANTUNES BARATA

DIRECÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
AEIST • Av. Rovisco Pais
1000 Lisboa • Tels. 88 93 23 / 88 10 18

PUBLICIDADE
TÉCNICA • AEIST • Av. Rovisco Pais - 1000 LISBOA - Tels. 88 10 18 / 89 75 15

COMPOSIÇÃO
OFICINAS GRÁFICAS DA RÁDIO RENASCENÇA

IMPRESSÃO
A TRIUNFADORA, artes gráficas, Lda.
Rua Silva Carvalho, 60 B, 1200 LISBOA

PUBLICAÇÃO TRIMESTRAL • 5000 EXEMPLARES

ASSINATURAS (4 números)
PORTUGAL 500$00 • ESTRANGEIRO 12 US$

N. 1/2 • 85 • NOVEMBRO 1985

índice de artigos

artigos convidados

3 CONTROLO DE STOCKS DE PRODUÇÃO EM LINHA DE MONTAGEM EM SÉRIE: INTERACÇÃO DISTRIBUÍDA ENTRE OS SISTEMAS INTERVENIENTES
JOSÉ M. F. MOURA e MARIA MANUELA M. A. VELOSO

17 AS VARIÁVEIS MINERALÚRGICAS NO PLANEAMENTO MINEIRO
JOSÉ QUINTINO ROGADO

24 PROCESSOS MARKOVIANOS DE RENOVAMENTO NA MODELAÇÃO DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS
M. F. RAMALHOTO

artigos

40 RECURSOS HUMANOS NACIONAIS E DESENVOLVIMENTO
LUIS AIRES BARROS

50 DIAGRAMAS POTENCIAL — pH
C. A. C. SEQUEIRA

64 SIMULAÇÃO DE UMA OPERAÇÃO UNITÁRIA DA INDÚSTRIA QUÍMICA: EVAPORAÇÃO DE MÚLTIPLO EFEITO
JOÃO F. PEREIRA GOMES e CARLOS M. ALVAREZ PÉREZ

69 MODULAÇÃO DE TIPO OKPSK COM DIAGRAMA DE OLHO PREDETERMINADO
ANTÓNIO GUSMÃO e NELSON ESTEVES

notas científicas

76 THE BREWSTER'S ANGLE FOR PERPENDICULAR POLARIZATION
M. DE ABREU FARO e A. S. C. FERNANDES

79 AN OPTICAL POLICY FOR CONTROLLING NON-INTERACTIVE FINITE SETS OF ELEMENTARY PROCESSES
JOSÉ QUINTINO ROGADO

82 CONDUTIVIDADES IÓNICA E ELECTRÓNICA DUM ÓXIDO PURO MOy COM DESORDEM DE SCHÖTTKY
C. A. C. SEQUEIRA

86 A SIMPLE PROCEDURE TO IMPLEMENT THE TWO STUBS AND $\lambda/4$ LINE IMPEDANCE MATCHING METHOD
J. FIGANIER e A. M. BARBOSA

90 THERMAL RECTIFICATION IN EXTENDED CAVITIES
J. M. M. BARATA e D. F. G. DURÃO

94 SOBRE O CONSUMO ENERGÉTICO DOS VEÍCULOS AUTOMÓVEIS (UM COMENTÁRIO)
F. ALMEIDA E CASTRO

97 OPERADORES ASSOCIÁVEIS À RADIAÇÃO EM MEIOS DE MOVIMENTO
M. JOÃO M. MARTINS

100 VARIAÇÃO DE ENTROPIA E REVERSIBILIDADE
RODRIGO DE ABREU

EDITORIAL

Com a publicação deste número duplo pretendeu-se e conseguiu-se reduzir o intervalo entre as sucessivas edições da Técnica.

Contribuiu de modo decisivo para a recuperação agora iniciada, a imediata publicação dos originais cujas provas de revisão se deram por findas. Desta atitude, poderá resultar que a ordem de entrada dos artigos não seja exactamente a mesma que se observa na publicação, mas tal facto fica salvaguardado pelo anúncio da data de entrada do original.

Se a afluência de artigos for numerosa e se distribuir harmonicamente pelas diversas secções e áreas científicas, se a revisão das provas for rápida, o inconveniente apontado tenderá a desvanecer-se.

Os aspectos focados pesam de modo importante nas limitações materiais que temos vindo a referir em números anteriores. Nesta matéria temos que ser intransigentes no que respeita à introdução de alterações no original inicial e já em trabalho de composição.

Mais uma vez se solicita que se respeitem as NORMAS relativas à extensão dos artigos.

No que se prende ao estritamente material, nomeadamente à forma e tempo de composição, continua-se a trabalhar.

Relativamente à colaboração recebida e natureza de artigos considerados, a experiência colhida e uma prospecção no domínio de potenciais leitores aconselha-nos o seguinte:

— Manter dois ARTIGOS CONVIDADOS por número.

  Nesta área temos recebido pronta e excelente colaboração.

— Reservar na secção de ARTIGOS uma parte importante, pretenderíamos quase total, para os artigos de síntese que, em linguagem rigorosa mas acessível, facultem aos estudantes as últimas novidades da Ciência e da Técnica, seu interesse actual e futuro.

  Cria-se assim um espaço novo que terá significativa projecção entre estudantes e até de outros que, embora especialistas, o não são nas diversas áreas contempladas.

— Manter e incentivar as NOTAS CIENTÍFICAS.

  Trata-se de um espaço eminentemente científico vocacionado para apresentar resultados de investigação ou experiência colhida na realização de trabalhos técnico-científicos.

  Aqui a colaboração tem rareado.

RESUMINDO

— Com os "ARTIGOS CONVIDADOS" a TÉCNICA reserva-se o direito de estimular o que pretende publicar;

— Com os "ARTIGOS" espera uma larga comparticipação entre professores e alunos e de que por acções concertadas se construam originais de interesse;

— Com as "NOTAS CIENTÍFICAS" a TÉCNICA oferece um espaço de publicação à actividade de Investigação e Desenvolvimento do I.S.T. e não só. Com esperança, continua aguardando.

M. de Abreu Faro

CONTROLO DE STOCKS DE PRODUÇÃO EM LINHA DE MONTAGEM EM SÉRIE: INTERAÇÃO DISTRIBUÍDA ENTRE OS SISTEMAS INTERVENIENTES*

JOSÉ M. F. MOURA **
MARIA MANUELA M. A. VELOSO ***

SUMÁRIO

O controlo da gestão de stocks de um armazém que abastece uma linha de montagem numa unidade industrial de produção em série é considerado através da interacção distribuída entre os sistemas intervenientes. As actividades desenvolvidas são identificadas fundamentalmente em dois grupos: comunicação, representando trocas de mensagens entre os sistemas componentes, e processamento, correspondendo a acções intensivas de tratamento da informação. O artigo detalha o diagrama temporal, analisando as actividades locais e as mensagens de comunicação trocadas entre os diversos sistemas componentes. Processamentos típicos são referidos, apresentando-se algoritmos de selecção de alternativas nomeadamente um baseado na chamada regra de stock mínimo.

O artigo estuda a sistematização de actividades em ambiente que designaremos por não estruturado. A não estruturação é por exemplo resultado da intervenção de operadores humanos. A definição do próprio sistema global, envolvendo a especificação de comportamentos complexos, é uma tarefa que subjaz o presente trabalho, mas que não é aqui considerada. Introduzindo progressivamente detalhes complementares, o artigo identificará no final aspectos essenciais do problema.

O trabalho exposto é parte integrante de um projecto operacional numa empresa industrial. A redução da intervenção humana, fonte possível de comportamentos inesperados (i.e. eventualmente não reconhecidos por outras componentes do sistema) é conseguida através do maior grau de flexibilidade incorporado. A contrapartida, como é habitual nos problemas de engenharia, é traduzida pela complexidade adicional exigida pela solução. Por questões de exposição, a apresentação cinge-se aos aspectos fundamentais, deixando de lado pormenores de implementação. Por outro lado, o artigo foca apenas uma das subcomponentes do projecto, sendo essencialmente extraído do capítulo 4 de [1]. Esta referência, e as referências nela incluídas, detalham as outras subcomponentes do trabalho.

I — INTRODUÇÃO

Referir-se-á por controlo da produção, a actividade que acompanha a história da montagem dos produtos na linha de produção em série.

Esta actividade tem o seu início quando é aberta uma obra de produção, que iremos denominar por **lote.** O controlo da produção é descrito de forma sequencial no procedimento apresentado em pseudo-código na figura 1.

```
procedimento CONTROLO_DA_PRODUCAO;
    begin
        identificação   do lote;
        requisição   de material;
        fornecimentos efectivos;
        while material_em_falta and lote_aberto do
            begin
                requisição   de material em falta;
                fornecimentos efectivos;
            end;
    end;
```

FIGURA 1 — Controlo da produção

Identificam-se os seguintes passos:

i) A **identificação do lote** define os volumes de produção a serem montados de produtos com determinadas características básica e específica (1).

ii) Com estes dados, procede-se à **requisição de material.** Com base na informação que define a composição dos produtos, é seleccionado o material a requisitar. Por análise das existências disponíveis, é feita a selecção das classes possíveis a serem requisitadas nos diferentes grupos de alternativas (ver 3.3, ponto 25 de [1]) (ver ainda secção IV mais abaixo).
É feita uma previsão de material requisitado que irá ser fornecido. Todo o material requisitado é cativado para o lote em questão.

iii) Os **fornecimentos efectivos** actualizam a informação de material previsto fornecido e permitem determinar se ainda há material requisitado não fornecido referido por material em falta. São criados movimentos de saída de material efectivamente fornecido.

iv) Enquanto o material está em falta e o lote se mantém

---

* *Trabalho parcialmente subsidiado pelo INIC e pelo projecto CAPS-EIM.*

** *Professor Catedrático (DEE-IST e CAPS-INIC), professor associado visitante no Departamento de Engenharia Electrotécnica e Ciência de Computadores, Massachusetts Institute of Technology (EUA).*

*** *Assistente (DEE-IST e CAPS-INIC), bolseira do INIC, estudante pós-graduada no Departamento de Ciência de Computadores, Boston University (EUA).*

(1) *Características básica e específica são definidas no Cap. 3, ponto 17, de[1]. Aqui, é suficiente o exemplo 1 apresentado na secção III.1, ponto 7.*

original recebido para publicação em 2/10/84

aberto, são desencadeadas sucessivas **requisições de material em falta,** seguidas da necessária informação dos **fornecimentos** que **efectivamente** abasteceram a linha de montagem.

v) O processo termina quando o lote é completado ou quando é introduzida uma data de fecho para o lote.

O procedimento da figura 1 descreve assim de um modo geral o encadeamento de actividades inerentes à história de um lote em particular.

Estas actividades são resultado da comunicação entre três sistemas, nomeadamente os sistemas INFORMAT, (Informática), PRODUÇÃO e ARMAZÉM.

O estudo do controlo da produção, que é apresentado neste artigo, está dividido em seis secções. As secções II, III e IV referem-se ao processo individual de cada lote, enquanto a secção V analisa as implicações da coexistência de vários lotes simultâneos no tempo. A secção II descreve a comunicação entre os sistemas e respectivas actividades. A secção III aprofunda as actividades locais e os processos de comunicação. A secção IV descreve o algoritmo de selecção de alternativas. Finalmente, a secção VI sumariza as conclusões do artigo.

II — COMUNICAÇÃO ENTRE SISTEMAS

1. Introdução

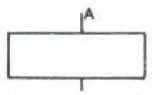
O procedimento simplificado da figura 1 apresenta as actividades, independentemente de qual o sistema que as executa. Procurou-se com esse resumo, definir a semântica do processo em si. Como sistemas intervenientes, e tomando uma atitude simplificadora, assumir-se-ão apenas os sistemas INFORMAT, PRODUÇÃO e ARMAZÉM. A interacção entre estes sistemas no âmbito do controlo da produção será estudada nesta secção.

2. Diagrama temporal de actividades e comunicação

A cronologia de comunicação entre os três sistemas em causa, descrita informalmente na secção I, é esquematizada na figura 2.

São postas em evidência as actividades locais de cada sistema e a comunicação de informação entre sistemas.

Notação: No diagrama de actividades e comunicação entre sistemas, usa-se a seguinte simbologia:



— actividade local do sistema A

— mensagem com origem no sistema A e destino o sistema B

— teste à informação local

— instrução interna ao esquema do diagrama

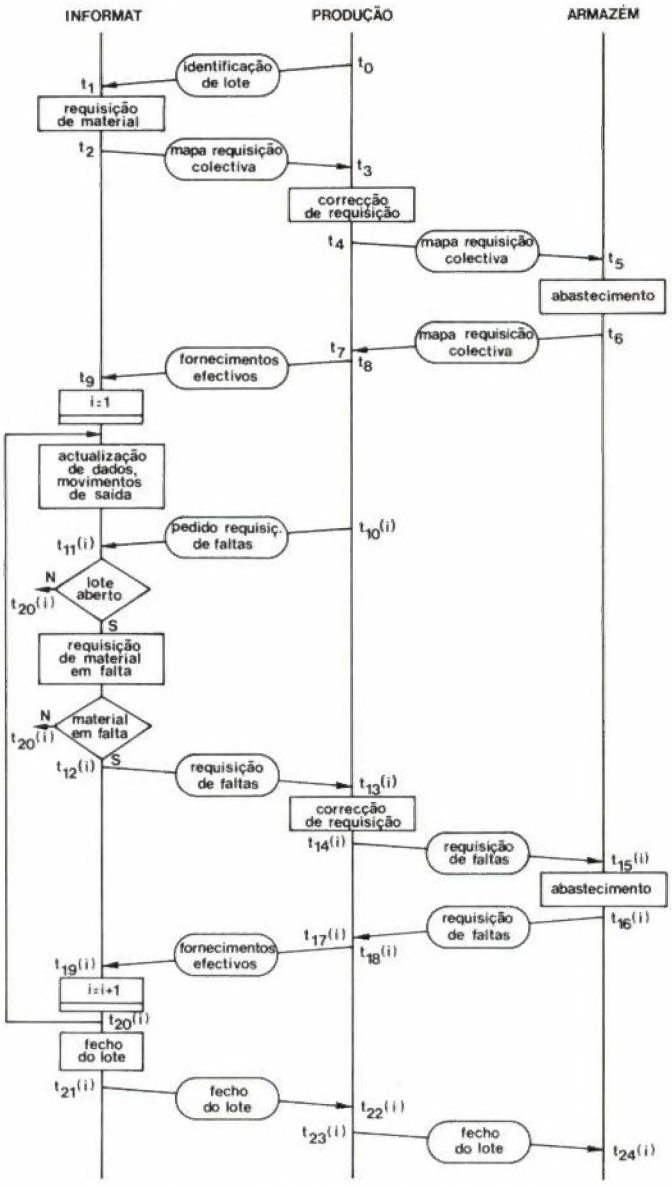


FIGURA 2 — Diagrama temporal de actividades e comunicação

3. Análise temporal do diagrama

Cada eixo de tempo diz respeito a um sistema em particular.

Facto 1: Os eixos de tempo representados traduzem escalas de tempo distintas para cada sistema.

Por outro lado, o processo é iterativo. As iterações estão numeradas na variável **i** do diagrama e o bloco iterativo está assinalado devidamente.

Facto 2: O processo exibe estrutura iterativa. O bloco iterativo tem os instantes de tempo significativos assinalados como função da respectiva iteração **i**.

A precedência entre actividades e comunicação entre sistemas é expressa pela numeração adequada dos instantes de tempo significativos.

Facto 3: Fora do bloco iterativo, verifica-se

$$k > k' \Rightarrow t_k > t_{k'} \ \forall k, k' \in N_0$$

Dentro do bloco iterativo verifica-se

i) $k > k' \Rightarrow t_k(i) > t_{k'}(i), \ \forall k, k' \in N, \ \forall i \in N$

ii) $i > j \Rightarrow t_k(i) > t_k(j), \ \forall i, j \in N, \ \forall k \in N$

Os instantes de tempo assinalados dizem respeito à comunicação entre sistemas. Assim, por exemplo,

t_1 — instante de recepção pelo sistema INFORMAT da mensagem de identificação de lote, emitida pelos sistema PRODUÇÃO.

t_2 — instante de envio ao sistema PRODUÇÃO do mapa de requisição colectiva, proveniente do sistema INFORMAT.

Finalmente, o instante de tempo que assinala o fim da actividade é referenciado em cada um dos sistemas INFORMAT, PRODUÇÃO e ARMAZÉM por t_{21} (i), t_{23} (i), e t_{24} (i), respectivamente.

4. Análise de comunicação do diagrama

O diagrama da figura 2 indica que o sistema ARMAZÉM não comunica directamente com o sistema INFORMAT no controlo da produção. O sistema PRODUÇÃO actua como meio de comunicação entre os sistemas INFORMAT e ARMAZÉM. Este facto coloca no sistema que recebe, e não no sistema que fornece, a responsabilidade de controlar as entradas de dados (fornecimentos efectivos) no sistema INFORMAT. Porque é previsível, em futuro próximo, a inversão desta responsabilidade, com comunicação directa entre os sistemas ARMAZÉM e INFORMAT, este facto não afecta a implementação do controlo da produção.

5. Análise de actividades do diagrama

No decorrer do capítulo, são descritas em pormenor as actividades do sistema INFORMAT no que respeita ao controlo da produção. As actividades do sistema PRODUÇÃO são as de gestão do material que serve a montagem dos produtos de um lote. Do diagrama da figura 2 concluem-se os seguintes pontos gerais, que caracterizam a função de cada sistema no processo de controlo da produção.

Facto 4: O sistema INFORMAT tem a seu cargo, o processamento automático de dados.

Facto 5: O sistema PRODUÇÃO garante que há, no sistema ARMAZÉM, requisições de material, para que este seja abastecido à linha de montagem.

Facto 6: O sistema ARMAZÉM abastece a linha de montagem com o material que lhe é requisitado.

III — ANÁLISE DAS ACTIVIDADES LOCAIS E MENSAGENS DE COMUNICAÇÃO

III.1. Identificação do lote

6. Especificações

Um lote é uma obra de produção. Em relação à identificação do lote, enumeram-se as seguintes especificações, que estão subjacentes ao funcionamento da empresa:

i) Um lote diz respeito a produtos com a **mesma característica básica** e diferentes características específicas. Para a montagem de produtos com características básicas distintas, são abertos lotes distintos.

ii) Um lote estabelece um volume de produção total dos produtos a montar. Este volume de produção é discriminado por característica específica.

7. Consequências das especificações

A especificação i) tem como consequência a existência em simultâneo no tempo, de vários lotes em montagem. Esta situação é analisada em detalhe na secção V.

O exemplo seguinte ilustra o impacto da especificação ii).

Exemplo 1: Identifique-se a característica básica com um **modelo** de produtos e a característica específica com uma **marca.** Pela definição de características básica e específica (ver capítulo 3, ponto 17 de [1]), um modelo pode ter várias marcas. Seja o modelo MOD_k e as **m** marcas respectivas MAR_{k1}, MAR_{k2}, MAR_{k3},..., MAR_{km}. O lote L001 estabelece para o modelo MOD_k, o volume de produção $VPROD_k = 1000$. Se $VPROD_{ki}$ representar, para este lote, o volume de produção a montar da marca MAR_{ki}, verifica-se

$$\sum_{i=1}^{m} VPROD_{ki} = VPROD_k$$

O lote fica totalmente identificado por

— número do lote, (Ex: L001).
— característica básica, (Ex: modelo MOD_k).
— volume de produção total, (Ex: $VPROD_k = 1000$).
— volume de produção discriminado por característica específica, (Ex: $VPROD_{ki}$, $i = 1,..., m$).

Esta informação é enviada pelo sistema PRODUÇÃO ao sistema INFORMAT, como se pode ver na figura 2. A actividade de requisição de material é desencadeada no sistema INFORMAT, após validação da identificação do lote recebida.

III.2. Requisição de material

8. Entrada e saída de dados

A requisição de material é uma actividade do sistema INFORMAT, que tem como entrada de dados:

— a estrutura de dados de incorporação de items nos produtos (relações INCORB e INCORE, globalmente denominadas INCOR),
— os dados de identificação do lote,
— o nível de existências dos items (relação EXIST),
— a descrição dos items (relação DESCRIT).

Como saída de dados é criada a relação de quantidades de items incorporados a requisitar para a montagem do lote (relação REQLOTE); ver o esquema de blocos na figura 3. Por razões de espaço, não é aqui possível detalhar o modelo lógico de dados, nem a estrutura física de suporte. Para fácil compreensão do artigo, as relações anteriores podem ser assimiladas pelo leitor de forma intuitiva a tabe-

las ou ficheiros convencionais. Assim, por exemplo, a relação EXIST definirá para cada item qual a sua existência em armazém.

FIGURA 3 — Diagrama de entrada/saída da actividade de requisição de material.

Na figura 4 apresenta-se o procedimento de requisição de material.

```
procedimento REQUISICAO_DE_MATERIAL;
    begin
      requisição  de items não pertencentes
            aos grupos de alternativas (REQLOTE1);
      selecção  de classes possíveis  a requisitar
            para cada grupo de arternativas (REQLOTE2);
      REQLOTE = REQLOTE1 U REQLOTE 2
    end;
```

FIGURA 4 — Requisição de material

Para o item I_j, que não é elemento de nenhum grupo de alternativas, i.e. $I_j \in G_o$, a quantidade a requisitar Q_{req} é função da quantidade incorporada Q_{inc} e do volume de produção do lote.

Seja o lote k respeitante a produtos com característica básica $CBAS_k$. O volume de produção $VPROD_k$ do lote k está discriminado por característica específica $CESP_i$. Verifica-se, como já se viu em III.1,

$$\sum_{i=1}^{m} VPROD_{ki} = VPROD_k,$$

em que m é o número total de características específicas (p.e. marcas). A quantidade Q_{req} é obtida por

$$\forall I \in G_o,\ Q_{req}(I) = \sum_{i=1}^{m} Q_{inc}(I, CBAS_k, CESP_i) * VPROD_{ki}$$

Exemplo 2: Seja o lote L001 com a identificação introduzida no exemplo 1. Seja $REQLOTE_1$, a relação resultante do processo de requisição de items não pertencentes aos grupos de alternativas. Na figura 5, $REQLOTE_1$ é descrita em linguagem pseudo-código. Os símbolos π, σ e $|X|$ da figura 5 têm o significado habitual dos operadores projecção, selecção e junção natural da álgebra relacional [2].

```
INCORLOT = π                ( σ                (INCOR))
           CESP,CODIT,CCUST    CBAS=MOD1 ∧
           PARTE,QUANT,UNID  ∧ GRUP=0 ∧ QUANT≠0
                             ∧ REQ =1
while not eof INCORLOT
    begin
      read INCORLOT (CESP,CODIT,CCUST,PARTE,QUANT,UNID);
      for all i,
        if CESP=MARli then QREQ:= QUANT * VPRODi/UNID
      write INCORLOT (CESP,CODIT,CCUST,PARTE,QREQ,UNID);
    end;
REQLOTE = π          ( π          (INCORLOT) |x| DESCRIT)
          CODIT,        CODIT,
          DESIGIT,      CCUST,
          ARM,          QREQ
          CCUST,
          QREQ
```

FIGURA 5 — Definição em pseudo-código da relação $REQLOTE_1$.

$REQLOTE_2$ é a relação de requisição de items pertencentes a grupos de alternativas. Verifica-se REQLOTE = $REQLOTE_1$ U $REQLOTE_2$.

É adiada para a secção IV a apresentação detalhada do algoritmo de selecção de alternativas.

9. Previsão de fornecimentos

Para a emissão dos movimentos de saída de material do ARMAZÉM, o sistema INFORMAT aguarda até ao instante t_9 (ver figura 2), em que lhe é dada informação sobre os fornecimentos efectivos de cada item.

Introduza-se, para cada item, o atributo de existência disponível EXSDISP, distinto da existência real do item, EXS. No ponto 10, é definido exactamente o valor de EXSDISP para cada item. De momento, admita-se que a existência disponível é uma fracção da existência real de cada item. Veja-se a tabela 1 para a especificação da nomenclatura usada no seguimento da apresentação.

EXS	-	EXiStência real
EXSDISP	-	EXiStência DISPonível
QREQ	-	Quantidade REQuisitada
QFORP	-	Quantidade FORnecida Prevista
QFOR	-	Quantidade FORnecida efectivamente
QCAT	-	Quantidade CATiva

TABELA 1 — Variáveis de processamento da requisição de material.

Facto 7: A previsão de fornecimentos é obtida do seguinte modo:

if EXSDISP $\leq$ QREQ
then QFORP = EXSDISP
else QFORP = QREQ.

Estuda-se na subsecção III.4 que os fornecimentos efectivos apenas terão que ser comunicados, caso contrariem

esta regra. Isto é, para reduzir o fluxo de comunicação, adoptar-se-á o tratamento explícito apenas das excepções.

10. Existência disponível — Relação EXCAT.

Para cada item, a quantidade requisitada traduz a quantidade efectivamente necessária para a montagem dos produtos em causa, já que se baseia nos dados da relação INCOR. A necessidade de prevenir a requisição de material ao armazém no lapso de tempo $t_9 - t_5 > 0$ (ver figura 2) sem com isso perturbar o controlo da produção leva à introdução do conceito de **quantidade cativa.**

A requisição de material **cativa** para o lote, cujo processo está a decorrer, as quantidades requisitadas para cada item.

Com o controlo da produção, surge assim uma outra relação básica para o sistema INFORMAT, onde se mantém a informação das existências cativas para cada item.

Seja a relação EXCAT (EXistências CATivas) com atributos CODIT, CCUST, OBRA, QCAT e dependências funcionais DFEC.

DFEC = { CODIT : CCUST : OBRA $\rightarrow$ QCAT }

Resultado 1: CODIT : CCUST : OBRA é a única chave da relação EXCAT, e esta encontra-se na forma normalizada de Boyce-Codd.

Definição 1: A existência disponível EXSDISP, para o item A, obtem-se a partir da sua existência real, EXS e quantidade cativas, pelo seguinte procedimento:

```
EXSDISP=EXS
while not eof EXCAT
   begin
      read EXCAT (CODIT,CCUST,OBRA,QCAT)
      if CODIT=A
         then EXSDISP=EXSDISP-QCAT;
   end;
```

Está subjacente na relação EXCAT a existência de várias obras LOTE simultâneas. Este ponto vai ser discutido na secção V.

III.3. Mapa de requisição colectiva

O mapa de requisição colectiva é a mensagem enviada pelo sistema INFORMAT ao sistema PRODUÇÃO. É uma enumeração exaustiva dos items e respectivas quantidades necessárias para a montagem de determinados produtos.

11. Atributos da mensagem

Uma mensagem é apresentada neste estudo, como uma relação (ver capítulo 2 de [1]). O mapa de requisição colectiva tem os **campos** ou **atributos** apresentados na tabela 2.

CODIT	-	CODigo do ITem
DESIGIT	-	DESIGnação do ITem
ARM	-	ARMazém
EXSDIN	-	EXiStência Disponível INicial (antes da presente requisição)
QJAFOR	-	Quantidade JA FORnecida
QREQ	-	Quantidade REQuisitada
QFOR	-	Quantidade FORnecida efectivamente

TABELA 2 — Atributos do mapa de requisição colectiva

Em [3] são apresentados exemplos concretos de mapas de requisição colectiva.

12. Cabeçalho do mapa de requisição colectiva

O mapa de requisição colectiva é um documento de movimentação de items, em que as quantidades movimentadas são as quantidades fornecidas efectivamente.

O cabeçalho do mapa tem os atributos numerados na tabela 3, comuns a todos os tuplos do mapa.

NUMD	- NUMero do Documento
OBRA	- OBRA (lote)
CBAS	- Características BASica
VPROD	- Volume de PRODução total
($CESP_i$, $VPROD_i$)	- par Característica ESPecífica, Volume de PRODução para i=1,...,n, em que m é o número de características a que a obra diz respeito

TABELA 3 — Atributos do cabeçalho do mapa de requisição colectiva.

Como se conclui do diagrama da figura 2, o mapa de requisição colectiva é uma mensagem de comunicação entre os três sistemas INFORMAT, PRODUÇÃO e ARMAZÉM. Estuda-se a acção de cada sistema em relação a este mapa.

13. Acção do sistema INFORMAT

O mapa de requisição colectiva é gerado automaticamente pelo sistema INFORMAT com base em:

i) relação REQLOTE de saída do processo de requisição de material (ver figura 3);

ii) informação residente sobre a existência disponível.

A partir dos dados de identificação do lote, o sistema INFORMAT preenche os atributos OBRA, CBAS, VPROD, $CESP_i$ e $VPROD_i$ (i = 1,..., m) do cabeçalho. Quanto ao atributo NUMD, o seu valor é gerado automaticamente por incremento do número do último documento emitido.

Os atributos do mapa, ver tabela 2, e à excepção de

QFOR, vêm directamente da relação REQLOTE. A existência disponível inicial EXSDIN, é obtida pelo processamento que define a existência disponível (ver definição 1), no instante inicial da requisição.

O atributo QFOR não é preenchido pelo sistema INFORMAT. Será o sistema ARMAZÉM que o preencherá informando das quantidades efectivamente fornecidas.

A situação em que EXSDIN < QREQ é assinalada com um alerta na existência disponível inicial (ver [3]).

14. Acção do sistema PRODUÇÃO

Como se vê na figura 2, o sistema PRODUÇÃO faz uma **correcção à requisição.**

Facto 8: O sistema PRODUÇÃO tem autoridade para alterar o conteúdo do campo da quantidade requisitada, QREQ.

Relembre-se que (ver figura 5)

QREQ = VPROD * INCOR. QUANT/INCOR. UNID

A alteração da quantidade requisitada QREQ é consequência das seguintes situações possíveis, detectadas pelo sistema PRODUÇÃO:

i) Os valores de INCOR. QUANT ou INCOR. UNID não estão actualizados.
ii) Por informação da linha de montagem, o sistema PRODUÇÃO tem conhecimento de que há um excesso ou uma falta de material que justifica a diminuição ou o aumento da quantidade requisitada (por exemplo, resultante de peças defeituosas ou sobras de lotes anteriores acumuladas na linha).

Enquanto a situação ii) não exige nenhuma acção extraordinária por parte do sistema PRODUÇÃO, para além da correcção justificada da quantidade requisitada pelo sistema INFORMAT, o mesmo não sucede em relação à situação i). A situação i) exige que o sistema PRODUÇÃO desencadeie uma acção de envio de mensagem ao sistema que mantém actualizada a relação INCOR, que é o sistema TÉCNICA (ver tabela 3.8 de [1]), informando-o da anomalia detectada.

Facto 9: O sistema PRODUÇÃO tem autoridade para acrescentar novas requisições de material, através da inserção dos atributos CODIT, DESIGIT, ARM, QREQ.

Este facto traduz uma situação de que o facto 8 é um caso particular.

15. Acção do sistema ARMAZÉM

O sistema ARMAZÉM recebe o mapa de requisição colectiva e procede ao **abastecimento** dos items listados nas quantidades requisitadas corrigidas ou não pelo sistema PRODUÇÃO.

Facto 10 O sistema ARMAZÉM introduz a informação quanto à quantidade efectivamente fornecida QFOR.

Notação: A notação (x) refere-se ao valor do atributo x de uma mensagem.

Facto 11 O ARMAZÉM atribui valores a QFOR, de acordo com a seguinte regra:

Se a quantidade fornecida no abastecimento é igual a (QREQ)
então (QFOR) = $\surd$ { sinal de acordo }
senão (QFOR) = valor da quantidade fornecida.

Denomina-se por QFOR indistintamente a designação do atributo ou o seu conteúdo. O contexto onde é inserida a variável torna claro o sentido pretendido.

Com respeito ao intervalo de tempo de abastecimento (acção do sistema ARMAZÉM), conclui-se da figura 2, o facto 12.

Facto 12: $t_6 - t_5 >> t_{16}(i) - t_{15}(i),\ i \in N_0$

Este facto traduz a constatação de que um abastecimento não é uma actividade com duração própria, antes dependendo do volume de items a abastecer. Como será estudado posteriormente, o volume de items requisitados no mapa de requisição colectiva é largamente superior ao volume de items requisitado numa requisição de faltas.

Serão postas presentemente em evidência, duas situações distintas que conduzem ao não abastecimento do material requisitado na sua totalidade.

16. Não abastecimento por insuficiência de existência física

O sistema ARMAZÉM apenas pode fornecer quantidades inferiores ou iguais às que existem fisicamente.

17. Não abastecimento por outros condicionamentos

Apesar da existência poder permitir o fornecimento integral, há condicionamentos particulares que o impedem. Estão neste caso, os items cujo volume físico ou fragilidade não permita a sua acumulação na linha de montagem durante o período total de fabrico do lote. Nesta situação, é fornecida apenas uma fracção da quantidade requisitada.

Todo o material não fornecido, fica em falta para o lote, sendo requisitado de novo em iterações seguintes.

III.4. Fornecimentos efectivos

18. Fornecimentos efectivos do mapa de requisição colectiva

Depois de receber o mapa de requisição colectiva proveniente do sistema ARMAZÉM (ver figura 2, $t_8 > t_7$), o sistema PRODUÇÃO comunica ao sistema INFORMAT os **fornecimentos efectivos** abastecidos pelo ARMAZÉM. Estes são devidamente assinalados no atributo QFOR, de acordo com a regra enunciada no facto 11.

O suporte para a comunicação tem os mesmos atributos que o mapa de requisição colectiva. Atendendo às quantidades previstas fornecidas (ver III.2, ponto 9), só há necessidade de comunicar ao sistema INFORMAT a informação que as contraria — **regra de excepção** referida anteriormente e formalizada no facto 13.

Notação: A notação $(x)_A$ refere-se ao valor do atributo x de uma mensagem, atribuído pelo sistema A.

Facto 13: O sistema PRODUÇÃO apenas informa o sistema INFORMAT, nas seguintes situações:

1. $(QREQ)_{PRODUÇÃO} \neq (QREQ)_{INFORMAT}$
2. $(EXSDIN) \geqslant (QREQ)$ e $(QFOR) \neq \surd$
3. $(EXSDIN) < (QREQ)$ e $(QFOR) \neq (EXSDIN)$

A situação 1 traduz os factos 8 e 9. As situações 2 e 3 resultam de má previsão, já que contrariam as regras apresentadas no facto 7.

Na situação 2, a existência disponível inicial EXSDIN é superior ou igual à quantidade requisitada QREQ. A quantidade prevista fornecida QFORP é igual à quantidade requisitada, de acordo com o facto 7. O valor da quantidade efectivamente fornecida (QFOR) diferente de $\surd$ significa que a quantidade requisitada QREQ não foi fornecida na totalidade (ver facto 11), o que contraria a previsão QFORP.

Na situação 3, a quantidade prevista fornecida QFORP é igual à existência disponível inicial EXSDIN, pois esta é inferior à quantidade requisitada QREQ. A previsão é contrariada pelo não fornecimento efectivo da existência disponível EXSDIN, expresso em $(QFOR) \neq (EXSDIN)$.

Uma análise estatística da frequência de ocorrência, de cada uma destas situações, conduz à justificação da validade da previsão de material fornecido.

19. Análise estatística

Para o tuplo genérico de um mapa genérico, definam-se os seguintes acontecimentos:

A = ocorrência de uma das situações descritas no facto 13.

B_i = ocorrência da situação i particular.

Porque os acontecimentos B_i são mutuamente exclusivos,

$$A = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$$

Facto 14: $$Pr\{A\} = \sum_{i=1}^{3} Pr\{B_i\}$$

Seja N o número médio de tuplos de um mapa, i.e., N é o número médio de requisições individuais de items numa requisição colectiva de material.

Facto 15: O número médio de tuplos N_{exc} exigindo a acção de excepção é

$$N_{exc} = Pr\{A\} \cdot N$$

Por análise estatística dos acontecimentos, resultaram os seguintes valores numéricos:

$$Pr\{B_i\} = \begin{cases} 0.010, & i = 1 \\ 0.040, & i = 2 \\ 0.050, & i = 3, \end{cases}$$

donde $Pr\{A\} = 0.1$. Este valor quantifica a economia de esforço representada pela regra de excepção adoptada. Pelo ponto 16, este valor será tanto menor, quanto mais fiável for a informação residente no sistema INFORMAT.

Os valores de $Pr\{B_2\}$ e $Pr\{B_3\}$ justificam-se pelo decorrer simultâneo de vários lotes, como será focado na secção V. De facto, embora a requisição de material funcione sequencialmente, o abastecimento no sistema ARMAZÉM não segue nenhuma ordem específica. Assim as existências disponíveis no acto de fornecimento podem não coincidir com as disponíveis EXSDIN, no momento da requisição de material.

Quanto à $Pr\{B_1\}$, pode ainda decompôr-se o seu valor em duas parcelas de acordo com as alternativas i) e ii) indicadas no ponto 14. Uma análise estatística mais fina mostrou que é a situação ii) — excesso ou falta de material na linha de montagem — que contribui mais significativamente para o valor de $Pr\{B_1\}$.

20. Fornecimentos efectivos da lista de requisição de faltas

Por pedido de requisição de faltas com origem no sistema PRODUÇÃO e destino o sistema INFORMAT é gerada a lista de material ainda em falta para a montagem do lote. O sistema PRODUÇÃO envia esta lista ao sistema ARMAZÉM, que a preenche e devolve de novo ao sistema PRODUÇÃO.

Sempre que é recebida a lista de requisição de faltas, o sistema PRODUÇÃO comunica ao sistema INFORMAT os fornecimentos efectivos. A regra seguida é distinta da que foi indicada no facto 13 para o mapa de requisição colectiva. A análise revela que os acontecimentos que ocorrem são distintos dos discriminados anteriormente. Por outro lado, as respectivas possibilidades de ocorrência são também significativamente diferentes, não se justificando a regra de excepção. Esta constatação não é de estranhar, dado que se trata agora de acompanhar os fornecimentos das excepções detectadas aquando do mapa de requisição colectiva.

Facto 16: O sistema PRODUÇÃO apenas informa o sistema INFORMAT, nas seguintes situações:

1. $(QREQ)_{PRODUÇÃO} \neq (QREQ)_{INFORMAT}$
2. $(QFOR) \neq 0$

Os valores elevados da probabilidade de ocorrência destas situações são ainda justificados pelo significado do mapa de requisição colectiva versus a lista de material em falta, e pelos respectivos tempos de abastecimento.

Como foi posto em evidência no facto 12, e atendendo à figura 2, verifica-se que $t_6 - t_5 >> t_{16}(i) - t_{15}(i)$, $i \in N$.

Facto 17: De modo a ser conhecido o abastecimento do material em falta com a assiduidade desejada, o intervalo de tempo $t_{16}(i) - t_{15}(i)$, $i \in N$, é muito menor que $t_6 - t_5$.

Este facto, apoiado numa análise estatística que estuda a frequência das situações descritas no facto 16, justifica a regra estabelecida de necessidade de comunicação.

Para concluir o estudo da comunicação de fornecimentos efectivos, faz-se notar que a regra de excepção adoptada procurou satisfazer um princípio geral de acção, que subjaz a filosofia de processamentos distribuídos.

Princípio: Em processamentos envolvendo sistemas distintos é desejável minimizar o volume de dados de comunicação entre sistemas.

A aplicação deste princípio, ao caso particular em estudo, levou não só ao processo de previsão de material fornecido, como ainda à análise estatística e semântica das diferentes situações que poderiam conduzir à necessária comunicação de dados.

III.5. Actualização de dados e movimentos de saída

A actualização de informação local no sistema INFORMAT é completada com a comunicação dos fornecimentos efectivos, que representam saída de material do sistema ARMAZÉM.

No capítulo 3, subsecção 3.2.5, ponto 12 de [1], é apresentada a relação MOVIT que traduz a movimentação dos items, que é actualizada pela actividade em estudo do controlo da produção. Por outro lado, é automaticamente cativado o material que se mantém em falta.

O acesso simultâneo por parte de diferentes sistemas à relação MOVIT é estudado no capítulo 7 de [1], onde é desenvolvido um algoritmo para controlo de concorrência de acessos. Razões de espaço levam à omissão destes tópicos no presente artigo.

III.6. Requisição de material em falta e fecho do lote

O sistema PRODUÇÃO emite um pedido de requisição de faltas, identificando o respectivo lote. Depois de testar se o lote em causa está aberto, o sistema INFORMAT procede à actividade de requisição do material em falta.

Facto 18: É requisitado o material que se encontra ainda cativo para este lote.

O processo de requisição de faltas é iterativo.

A actualização de dados mantém a iteração **k** dependente dos dados das iterações anteriores.

Notação: X^k representa o valor do atributo X na iteração k.

Seja k a presente iteração. Então, tendo em conta as abreviaturas apresentadas na tabela 2, secção III.3, ponto 11,

$$QREQ^k = QREQ^{k-1} - QFOR^{k-1}$$

$$QJAFOR^k = \sum_{i=1}^{k-1} QFOR^i$$

Já se justificou a existência de material em falta (ver pontos 16 e 17, secção III.3).

A **quantidade já fornecida** QJAFOR é um acumulado das quantidades efectivamente fornecidas nas iterações anteriores. A relação entre $QREQ^k$ e $QJAFOR^k$ permite ter noção da fracção de material ainda em falta.

A acção de **fecho de lote** pode ter origem em duas situações não exclusivas:

i) abastecimento integral do material em falta,
ii) decisão do sistema PRODUÇÃO.

Na situação ii), se o material não foi integralmente abastecido, há uma actualização do material cativo, libertando o material em falta do seu estado de cativo para o lote fechado.

IV. ALGORITMO DE SELECÇÃO DE ALTERNATIVAS

21. Introdução

No capítulo 3 de [1] é apresentada a constituição dum produto como sujeita à definição de alternativas. Para a requisição de material com vista à montagem de produtos específicos, torna-se necessário estabelecer um algoritmo de selecção de alternativas. Subconjuntos de items (não necessariamente disjuntos) (com a respectiva incorporação definida) são ditos em alternativa se a constituição de um produto implicar a integração de um **e** um só desses subconjuntos.

No referido capítulo 3, distinguem-se dois casos dependendo do critério adoptado para a selecção de material por grupo de alternativas:

CRITÉRIO 1: selecção por **ordem de prioridades** pré-estabelecida.

CRITÉRIO 2: selecção por busca de **stock mínimo.**

O caso 1 será abreviadamente referido como critério de prioridades, enquanto que o caso 2 será referido como o critério da busca do stock mínimo. O stock mínimo não é a existência mínima, mas sim esta normalizada pela incorporação.

Um grupo de alternativas verifica o critério 2, se não foi estabelecida uma ordem de prioridades de escolha entre as classes possíveis que o compõem. A busca do stock mínimo consiste na procura do item do grupo de alternativas, cujo stock seja o mínimo. O item de stock mínimo determina a primeira escolha de uma classe possível do grupo a que pertence. Se o stock mínimo não permitir atingir o volume da produção total do lote, nova busca de stock mínimo de entre os items das restantes classes possíveis, determina a segunda classe escolhida. A busca iterativa termina, quando se conseguiu atingir o volume de produção total do lote ou se esgotarem as classes possíveis.

Nos dois casos, se se esgotarem as classes possíveis, sem ser atingido o volume de produção total, o algoritmo requisita o volume de produção em falta, de uma classe possível aleatória ou pré-estabelecida.

No decorrer desta secção, estuda-se em detalhe cada um dos casos possíveis, bem como o procedimento algoritmico implementado. A apresentação é acompanhada de exemplos ilustrativos.

IV.1. Selecção por ordem de prioridades pré-estabelecida

O algoritmo tem como entrada os dados sobre a incorporação dos items nas diferentes classes possíveis e determina os volumes de requisição para os items de cada classe possível.

Entrada:
1. **G** é um grupo de alternativas.
2. **ncl** é o número de classes possíveis para o grupo G.
3. **PRIOR [ncl]** é a matriz de prioridades por classe possível. PRIOR [i] = j significa que a classe j tem prioridade i.

4. **nit** é o número de items do grupo de alternativas.
5. **QINC [nit x ncl]** é a matriz de quantidades de incorporação por item e por classe possível.
6. **EXSD [nit]** é o vector de existências disponíveis para cada item.
7. **VPROD** é o volume de produção a atingir.

Objectivo: Determinar a matriz VCLAS [ncl] dos volumes a requisitar de cada classe possível de modo a o bter a matriz QITEM [nit] de quantidades a requisitar de cada item do grupo G, tal que

1. QINC x VCLAS = QITEM
2. $\sum_{k=1}^{ncl}$ VCLAS [k] = VPROD.
3. Se obedeceu às prioridades definidas em PRIOR.

O algoritmo é explicado com o auxílio de um exemplo particular. O procedimento que implementa este algoritmo é apresentado na figura 7. O código escolhido foi o Pascal, já que se considera esta uma linguagem auto explicativa.

22. Exemplo 3

Seja o grupo de alternativas representado na figura 6 com 7 items associados em 3 classes possíveis.

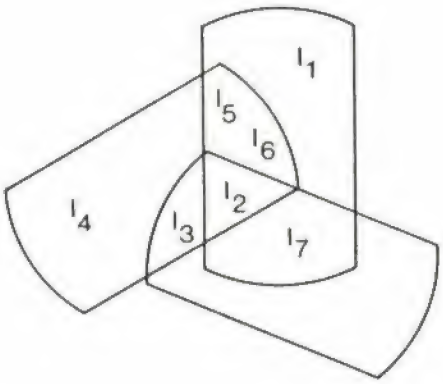


FIGURA 6 — Items e respectivas classes possíveis

Admitam-se a matriz de incorporações QINC e a matriz de existências disponíveis EXSD:

$$QINC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$EXSD = [450\ 825\ 1000\ 125\ 800\ 632\ 2500]^T$$

O volume de produção assumido é VPROD = 1000 considerando-se o vector de prioridades PRIOR = $[2\ 3\ 1]^T$. As classes 1, 2 e 3 têm respectivamente prioridades 3, 1 e 2.

Na iteração 1 do algoritmo é seleccionada a classe de prioridade mais elevada, que no exemplo em consideração é a classe 2. Começando na classe 2, determina-se o volume máximo permitido pelas existências disponíveis. Os elementos da classe 2 são I_2, I_3 e I_7, com existências disponíveis, 825, 1000 e 2500.

O volume a requisitar da classe 2, será:

$$VCLAS\ [2] = \lfloor \min\left(\frac{825}{1}, \frac{1000}{2}, \frac{2500}{3}, VPROD\right)\rfloor$$

onde $\lfloor . \rfloor$ representa a parte inteira do argumento e min $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ calcula o mínimo entre $a_1, a_2 \ldots, a_n$. Os argumentos da função min correspondem aos valores das existências disponíveis divididos pela quantidade de incorporação dos items da classe 2. Para o exemplo em estudo, com VPROD = 1000,

$$VCLAS\ [2] = 500$$

como

$$VCLAS\ [2] < VPROD = 1000,$$

a classe de prioridade seguinte é analisada, depois de o algoritmo actualizar o vector das existências disponíveis

$$EXSD = [455\ 325\ 0\ 125\ 800\ 632\ 1000]^T,$$

e o volume de produção,

$$VPROD = 1000 - VCLAS\ [2] = 500.$$

Para a classe de prioridade 2, ou seja a classe 3, obtém-se de forma idêntica,

$$VCLAS\ [3] = \lfloor \min\left(\frac{325}{2}, \frac{0}{3}, \frac{125}{3}, \frac{800}{1}, \frac{632}{1}, VPROD\right)\rfloor$$

O item I_3 é comum às classes 2 e 3. Porque foi este o item que já decidiu o volume de produção possível na iteração anterior, isto é da classe 2, a sua existência disponível foi completamente esgotada EXSD [3] = 0. O volume de produção possível com a classe 3 é consequentemente nulo. O algoritmo passa imediatamente à classe seguinte, neste caso à última classe possível, ou seja, a classe 1, de prioridade 3.

O volume de produção possível vem

$$VCLAS\ [1] = \lfloor \min\left(\frac{455}{2}, \frac{325}{1}, \frac{800}{2}, \frac{632}{3}, \frac{1000}{1}, VPROD\right)\rfloor.$$

Como VPROD = 500, vem

$$VCLAS\ [1] = 210.$$

As existências disponíveis são uma vez mais actualizadas. O volume de produção total não foi atingido

$$VCLAS\ [2] + VCLAS\ [1] = 710 < 1000.$$

Para suprir o débito 1000 − 710 = 290, admita-se que a classe possível a ser requisitada nesta situação é pré-estabelecida como sendo a de prioridade máxima, neste caso, a classe 2. É actualizado assim o valor de VCLAS [2]

$$VCLAS\ [2] = 500 + 290 = 790.$$

As existências disponíveis são novamente actualizadas de acordo com esta nova requisição. Note-se no entanto que as existências disponíveis são limitadas inferiormente ao valor zero. O algoritmo, neste exemplo particular, teria como saída as seguintes matrizes VCLAS de volumes de produção por classe e QITEM de quantidades requisitadas por classe.

$$VCLAS = [210\ 790\ 0]^T$$

$$QITEM = [420\ 1000\ 1580\ 0\ 420\ 630\ 2580]^T$$

A existência disponível para cada item é dada por

$$EXSD = [30\ 0\ 0\ 125\ 380\ 2\ 0]^T.$$

```
procedure SEL_PRIOR; {selecção  por prioridades}

    const
        nit=...     {número  de items do grupo}
        ncl=...     {número  de classes  possíveis}
        infinito=...

    var
        i, j, p, pmax, pcl: integer;
        VJAPOS, VPROD: real;
        FIM: boolean;
        EXSD, QITEM: array [1..nit] of real;
        VCLAS: array [1..ncl] of real;
        PRIOR: array [1..ncl] of integer;
        QINC: array [1..nit,1..ncl] of real;

    function min (x, y : real): real;
    {determina o mínimo  entre x e y}


    begin
        {inicialização  de  variáveis}
        for i:=1 to ncl do
          read (PRIOR [i]);
        for i:=1 to nit do
          read (EXSD [i]);
        for i:=1 to nit do
          for j:=1 to ncl do
            read (QINC [i,j];
        for i:=1 to nit do
          QITEM [i]:=0;
        for i:=1 to ncl do
          VCLAS [i]:=infinito;
        VJAPOS:=0
        FIM:=false;
        pmax:=1;  {prioridade máxima  é  1}

{cálculo  de VCLAS}
while not (FIM or p=ncl) do
  begin
    p:=p+1;
    pcl:=PRIOR [p];  {a classe pcl tem prioridade p}
    for i:=1 to nit do
      if not (QINC [i,pcl]=0)
        then VCLAS [pcl]:=min (VCLAS [pcl],
                                [(EXSD [i]/QINC [i,pcl])];
    if not (VCLAS [pcl]=0)
      then begin
        if VCLAS [pcl] > VPROD-VJAPOS
            then begin
              VCLAS [pcl]:=VPROD-VJAPOS;
              FIM:=true;
            end;  {then, if}
        VJAPOS:=VJAPOS+VCLAS [pcl];
        for i:=1 to nit do
          EXSD [i]:=EXSD [i]-VCLAS [pcl] *
              QINC[i,pcl];
        end;  {then, if}
    end;  {while}
  for i:=1 to ncl do
    if VCLAS [i]=infinito then VCLAS [i]:=0;
  if not (VPROD=VJAPOS)
    then begin
      VCLAS [PRIOR [pmax]]:=VCLAS [PRIOR [pmax]]
                + (VPROD-VJAPOS)
      for i:=1 to nit do
        if not (QINC [i,PRIOR [pmax]]=0
          then begin
            EXSD [i]:=EXSD [i]-(VPROD-VJAPOS) *
                  * QINC [i,PRIOR [pmax]];
            if EXSD [i] < 0
              then EXSD [i]:=0;
          end;
    end;


    for i:=1 to nit do     {requisição  de materiais}
        for j:=1 to ncl do
          QITEM [i]:=QITEM [i] + VCLAS [j] * QINC [i,j];
end.
```

FIGURA 7— Algoritmo de selecção de alternativas com prioridades pré-estabelecidas

O procedimento apresentado na figura 7 é uma versão simplificada do algoritmo implementado. Pretende-se apenas realçar o aspecto da selecção das classes possíveis, não se evidenciando pormenores de acesso e actualização de dados nas relações respectivas. Daí que a inicialização de dados consista na entrada de matrizes. Na implementação prática, esta entrada é equivalente à leitura dos dados nas respectivas relações. As instruções de read devem ser assim interpretadas, como procedimentos de leitura dos dados nas respectivas relações, com criação da estrutura de dados utilizada pelo algoritmo. O tempo de processamento da busca iterativa é minimizado pela manipulação de dados estruturados matricialmente, pois decorre em memória central. São assim minimizados os acessos à memória de massa, para optimização do tempo de resposta.

IV.2. Selecção por busca do stock mínimo

O algoritmo, neste caso, procede de modo distinto, embora tenha como base os mesmos dados.

Entrada:
1. **G** é um grupo de alternativas.
2. **ncl** é o número de classe possíveis para o grupo G.
3. **nit** é o número de items do grupo de alternativas.
4. **QINC [nit x ncl]** é a matriz de quantidades de incorporação por item e por classe possível.
5. **EXSD [nit]** é o vector de existências disponíveis para cada item.
6. **VPROD** é o volume de produção total.

Objectivo: Determinar a matriz VCLAS [ncl] dos volumes a requisitar de cada classe possível de modo a obter a matriz QITEM [nit] de quantidades a requisitar de cada item do grupo G, tal que

1. QINC x VCLAS = QITEM
2. $\sum_{k=1}^{ncl}$ VCLAS [k] = VPROD.
3. Se obedeceu à busca de stock mínimo.

O algoritmo é explicado por recurso ao mesmo exemplo da subsecção IV.1. Na figura 8 é apresentado um procedimento em Pascal para a implementação do algoritmo.

Considere-se o grupo de alternativas introduzido na figura 6, com matriz de quantidades incorporadas QINC e existências disponíveis EXSD, dadas no ponto 22, da mesma subsecção IV.1.

Seja mais uma vez VPROD = 1000. O algoritmo baseia-se na construção da matriz EXSREST [nit x ncl]. Esta matriz traduz as existências para cada item que estariam disponíveis, se para o VPROD em causa, o item fosse requisitado para dada classe possível.

Se para dada classe, o item tem incorporação nula, a respectiva entrada é inicializada a infinito. Para o grupo em exemplo, a matriz EXSREST vem

$$\text{EXSREST} = \begin{bmatrix} -1550 & -175 & \infty & \infty & -1200 & -2368 & 1500 \\ \infty & -175 & -1000 & \infty & \infty & \infty & -500 \\ \infty & -1175 & -2000 & -2875 & -200 & -368 & \infty \end{bmatrix}$$

em que, por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{EXREST}\ (6,1) &= \text{EXSD}\ (6) - \text{QINC}\ (6,1) * \text{VPROD} \\ &= 632 - 3 * 1000 \\ &= -2368 \end{aligned}$$

Por busca do elemento mínimo da matriz EXSREST, o algoritmo identifica o item que conduz ao stock mínimo. A classe possível a que esse item pertence é a primeira a ser requisitada pelo algoritmo. Em caso do item de stock mínimo pertencer a mais que uma classe, é arbitrariamente escolhida a classe de menor número. O processo é iterativo e termina quando se atingiu o volume de produção desejado, ou quando já não há mais classes possíveis a requisitar.

No exemplo em estudo, o elemento mínimo da matriz é EXSREST [4,3] = – 2875. Na primeira iteração, é requisitada a classe 3. O volume de produção máximo permitido para esta classe possível é determinado por processo idêntico à selecção por prioridades.

Assim, os elementos da classe possível 3 são I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 com existências disponíveis respectivamente 825, 1000, 125, 800, 632. O volume de produção permitido para a classe 3 é

$$\text{VCLAS}\,[3\,] = \lfloor \min\left(\frac{825}{2}, \frac{1000}{3}, \frac{125}{3}, \frac{800}{1}, \frac{632}{1}, \text{VPROD}\right) \rfloor.$$

Com VPROD = 1000, vem VCLAS [3] = 41.

O algoritmo actualiza o vector das existências disponíveis. O volume de produção em falta é VPROD = 1000 – 41 = 959. A matriz EXSREST é construída com os valores actualizados, a busca do elemento de stock mínimo não incidindo sobre as classes possíveis já requisitadas, neste caso, a classe 3 (as respectivas entradas são inicializadas a infinito).

$$\text{EXSD} = \begin{bmatrix} 450 \\ 743 \\ 877 \\ 2 \\ 759 \\ 591 \\ 2500 \end{bmatrix} \qquad \text{EXSREST} = \begin{bmatrix} -1468 & \infty & \infty \\ -216 & -216 & \infty \\ \infty & -1041 & \infty \\ \infty & \infty & \infty \\ -1159 & \infty & \infty \\ -2286 & \infty & \infty \\ 1541 & -377 & \infty \end{bmatrix}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{EXSREST}\ (7,2) &= \text{EXSD}\,(7) - \text{QINC}\,(7,2)\,.\,(1000 - 41) \\ &= 2500 - 3 \times 959 \\ &= -377 \end{aligned}$$

O elemento mínimo da matriz é EXSREST [6,1] = – 2286. Na segunda iteração é requisitada a classe possível 1 com o volume de produção máximo permitido pelas existências disponíveis dos items que a constituem. Esse valor é

$$\text{VCLAS}\,[1\,] = \lfloor \min\left(\frac{450}{2}, \frac{825}{1}, \frac{759}{2}, \frac{591}{3}, \frac{2500}{1}, \text{VPROD}\right) \rfloor.$$

Como VPROD = 959, vem VCLAS [1] = 197.

O volume de produção em falta é
VPROD = 959 – 197 = 762.
É escolhida a classe 2 depois de se ter actualizado o vector das existências disponíveis.

$$\text{EXSD} = [56\ 546\ 877\ 2\ 365\ 0\ 2303\ ]^T$$

O volume de produção permitido pela classe possível 2, é

$$\text{VCLAS}\,[2\,] = \lfloor \min\left(\frac{546}{1}, \frac{877}{2}, \frac{2303}{3}, 762\right) \rfloor = 438.$$

Como não se atingiu o volume de produção total desejado e se esgotou o stock dos items do grupo, é requisitado o adicional numa classe possível pré-definida, por exemplo, a classe 3.

O algoritmo determina os volumes de produção apresentados em VCLAS por classe possível, e requisita os items constituintes do grupo, nas quantidades representadas em QITEM. As existências disponíveis finais dos items estão calculadas no vector EXSD.

$$\text{VCLAS} = [197\ 438\ 365]^T$$

$$\text{QITEM} = [394\ 1365\ 1971\ 1095\ 759\ 956\ 1511]^T$$

$$\text{EXSD} = [56\ 0\ 0\ 0\ 41\ 0\ 989]^T$$

Note-se que

$$\text{QITEM}\ (i) = \sum_{k=1}^{3} \text{QINC}\ (i, k).\ \text{VCLAS}\ (k)$$

visto que,

$$\underset{(\text{nit x ncl})}{\text{QINC}} \times \underset{(\text{ncl x 1})}{\text{VCLAS}} = \underset{(\text{nit x 1})}{\text{QITEM}}$$

O algoritmo difere do caso 1 apenas no critério de escolha de classe possível a ser requisitada. O exemplo apresentado põe em evidência a diferença significativa que se veri-

fica entre os dois critérios de selecção em termos das quantidades requisitadas de material.

É permitido alterar o critério de selecção dum grupo de alternativas, informando se esse grupo verifica o caso 1 ou 2, por actualização da relação **PRIORGRUP** introduzida no capítulo 3 de [1].

De um ponto de vista prático, estes dois critérios de escolha correspondem a motivações distintas do gestor. O critério do stock mínimo é o normalmente utilizado, pois permite eliminar os chamados "monos" em armazém — items em relação aos quais e por razões diversas se deixam de colocar encomendas. O critério de prioridades dá total flexibilidade na definição a priori de escolha. É ainda de referir que entre iterações de processo de controlo da produção, é possível alterar o critério de selecção.

```
procedure SEL_STOCKMIN;   {selecção  por busca do stock  mínimo}


    const
         nit=...     {número  de items do grupo}
         ncl=...     {número  de classes  possíveis}
         infinito=...



    var
         i, j, kcl, cl, clfim: integer;
         VFALT, VPROD, STMIN: real;
         FIM, DIF: boolean;
         EXSD, EXSREST, QITEM: array [1..nit] of real;
         VCLAS: array [1..ncl] of real;
         QINC, QINCX: array [1..nit,1..ncl] of real;

    function min (x, y : real): real;
    {determina o mínimo  entre x e y}.

begin
     {iniciação  de  variáveis}
     for i:=1 to nit do
       read (EXSD [i]);
     for i:=1 to nit do
       for j:=1 to ncl do
         begin
           read (QINC [i,j]);
           QINC [i,j]:= QINC [i,j];
         end;
     for i:=1 to nit do
       ITEM [i]:=0
     for j:=1 to ncl do
       VCLAS [j]:= infinito;
     kcl:=0;
     VFALT:= VPROD;
     FIM:= false;
     clfim:= ncl;

    {cálculo  de VCLAS}
    while not (FIM or kcl=ncl) do
     begin
       kcl:= kcl + 1;
       STMIN:= infinito;
       for i:=1 to nit do
         for j:=1 to ncl do
           EXSREST [i,j]:= infinito;
       for i:=1 to nit do
         for j:=1 to ncl do
           if not QINC [i,j]=0
             then begin
               EXSREST [i,j]:= EXSD [i]-QINCX [i,j]*VFALT;
               if EXSREST [i,j] < STMIN
                 then begin
                   STMIN:=EXSREST [i,j]
                   cl:=j;
                 end; {then}
             end; {then}
{a classe escolhida é  cl}
for i:=1 to nit do
  if not QINC [i, cl]=0
    then
      VCLAS [cl]:= min (VCLAS [cl], [ EXSD (i)/
                                  QINC [i,cl]) ];
if not (VCLAS [cl]=0)
  then begin
    if VCLAS [cl] > VFALT
      then begin
        VCLAS [cl]:= VFALT;
        FIM:= true;
      end;  {then}
    VFALT:= VFALT - VCLAS [cl];
    for i:=1 to nit do
      EXSD [i]:=EXSD [i] - VCLAS [cl] * QINC [i,cl];
  end;  {then}
for i:=1 to nit do


      QINCX [i,cl]:= 0
  end;  {while}
for i:=1 to ncl do
  if VCLAS [i] = infinito
    then
      VCLAS [i]:= 0
if not (VFALT = 0)
  then begin
    VCLAS [clfim]:= VCLAS [clfim] + VFALT
    for i:=1 to nit do
      if not (QINC [i,clfim]) = 0
        then begin
          EXSD [i]:= EXSD [i] - VFALT * QINC [i,clfim];
          if EXSD (i) < 0
            then
              EXSD [i]:= 0;
        end;  {then}
    end;  {then}

    {requisição  de material}
    for i:=1 to nit do
      for j:= to ncl do
        QITEM [i]:= QITEM [i] + VCLAS [j] * QINC [i,j];

end.
```

FIGURA 8 — Algoritmo de selecção de alternativas por busca de stock mínimo.

V. LOTES SIMULTÂNEOS

23. Fases possíveis de lotes simultâneos

Até agora, apresentou-se o estudo respeitante à montagem de um só lote. Pôs-se em relevo, porém, que vários lotes existem em decurso simultâneo no tempo. Nesta secção mostra-se que, o método de funcionamento implementado para um só lote, permite a existência de vários lotes em simultâneo, sem necessidade de complexificação.

Em relação a um lote, começa-se por resumir o processo descrito, enumerando algumas regras de funcionamento.

Facto 19: Um lote tem as seguintes regras de funcionamento

R1: A previsão de material efectivamente fornecido é baseada nas **existências disponíveis** (subsecção III.2, ponto 9, facto 7).

R2: Quando da requisição de material, as quantidades de material **necessárias** são **cativadas** para o lote (subsecção III.2, ponto 10).

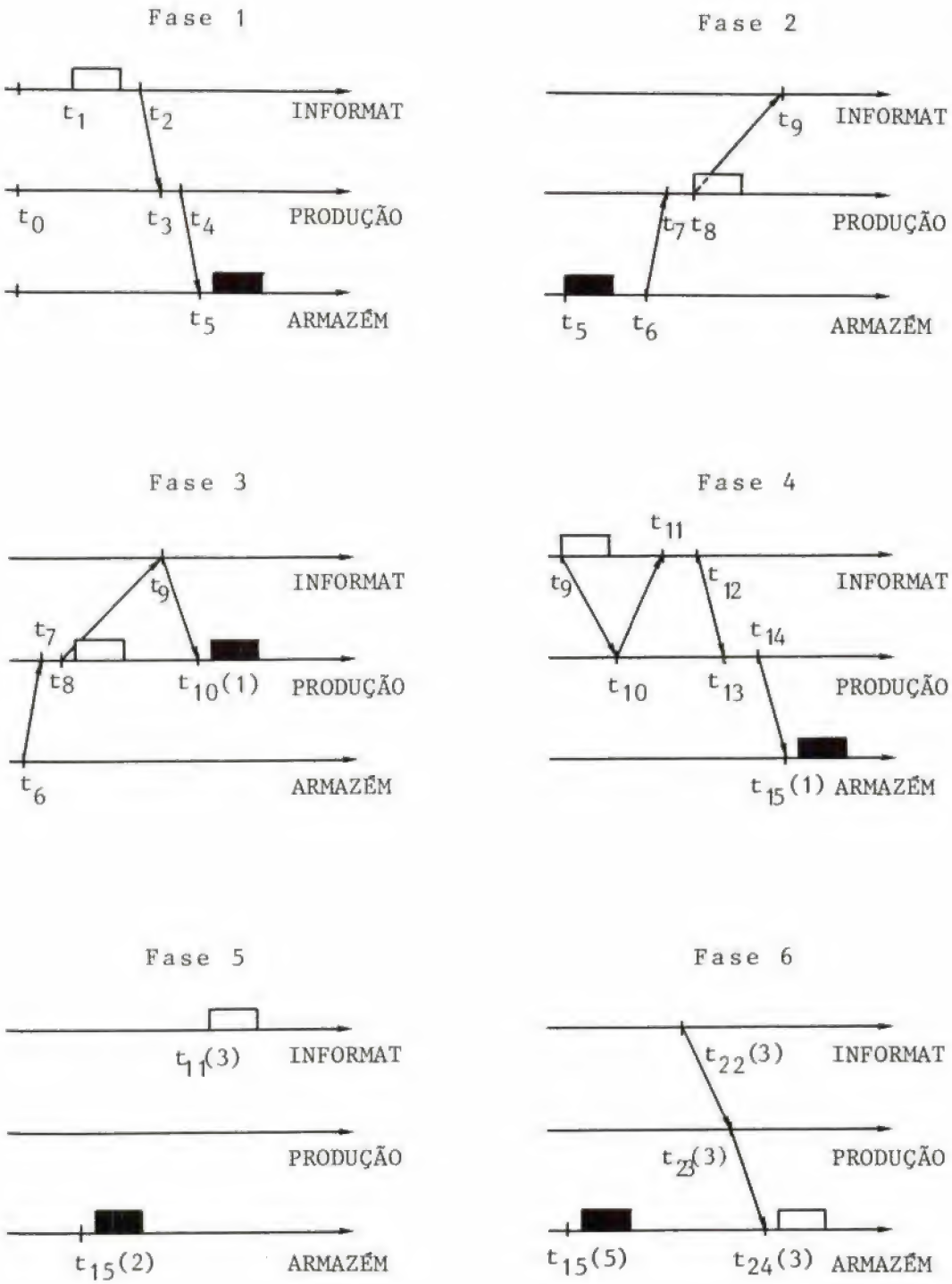


FIGURA 9 — Diferentes fases possíveis para o decorrer simultâneo de dois lotes.

lote 1 ■, lote 2 □

R3: A **ordem de abastecimento** das requisições de material não é relevante, em termos de actualização de dados (subsecção III.4).

R4: A selecção de alternativas é baseada nas existências disponíveis.

Estudam-se as consequências destas regras de funcionamento no decorrer de vários lotes em simultâneo. Para tal, veja-se a figura 9 em que se consideram os três sistemas INFORMAT, PRODUÇÃO e ARMAZÉM em comunicação, no decurso da história de dois lotes simultâneos, lote 1, representado por ■ e lote 2, representado por □

Os instantes de tempo assinalados são os correspondentes aos apresentados na figura 2.

Com o encadeamento das diferentes fases, pretende-se exemplificar a independência entre os diferentes lotes.

Fase 1: O mapa de requisição colectiva respeitante ao lote 1 é abastecido pelo sistema ARMAZÉM, enquanto a requisição de material para o lote 2 é processada pelo sistema INFORMAT.

Os fornecimentos efectivos para o lote 1 não são conhecidos. É a regra R2, seguida aquando da requisição do material para o lote 1, que garante que a previsão de material calculada pela regra R1 fornecido para o lote 2 seja consistente. Por outro lado, a selecção de alternativas para o lote 2 é independente da situação do lote 1, pelas regras R1 e R2.

Fases 2, 3, 4, 5: Os dois lotes trocam as suas posições no tempo.

A ordem de abastecimento no sistema ARMAZÉM é arbitrária, na medida em que não é descrita por nenhuma regra bem definida. Este facto apenas se traduz num possível número superior de comunicação de fornecimentos efectivos. A análise estatística mostra porém, que este factor não é relevante (subsecção III.4, ponto 19).

Fase 6: O lote 2 termina apenas com três iterações decorridas, enquanto o lote 1 se encontra na 5.ª iteração na fase de abastecimento pelo sistema ARMAZÉM.

Embora o lote 2 tenha iniciado após o desencadear do lote 1, aquele termina antes deste, sem que a informação local de cada um dos sistemas seja por isso afectada.

As regras R1, R2 e R4 são responsáveis pela desejada independência entre os diferentes lotes decorrendo em simultâneo. A regra R3 liberta a informação local de cada sistema de relações de ordem entre diferentes lotes. As regras R1, R2, R3 e R4 traduzem a robustez do sistema do controlo da produção implementado.

Facto 20: A existência de vários lotes em simultâneo apenas pode afectar o volume de dados na comunicação de fornecimentos efectivos.

24. Comunicação entre sistemas respeitando vários lotes

O sistema PRODUÇÃO pode identificar vários lotes em simultâneo, requerendo um mapa de requisição colectiva **comum** para os vários lotes. O processo de requisição colectiva é sequencial para cada lote, mas o mapa é comum aos vários lotes.

Os fornecimentos efectivos traduzem quantidades fornecidas para o somatório dos lotes. Há necessidade de fraccionar estes fornecimentos pelos diferentes lotes.

Seja QTOT, a quantidade total fornecida efectivamente, $QREQ_i$, a quantidade requisitada para o lote i e $QFOR_i$, a quantidade efectivamente fornecida para o lote i.

O sistema INFORMAT actualiza os dados de cada lote, calculando $QFOR_i$, por simples divisão proporcional.

$$\frac{QREQ_i}{\sum_i QREQ_i} = \frac{QFOR_i}{QTOT}$$

donde,

$$QFOR_i = \frac{QREQ_i \cdot QTOT}{\sum_i QREQ_i}$$

Caso o item seja inserido na requisição pelo sistema PRODUÇÃO, a comunicação do fornecimento efectivo do item deve ser feita lote a lote, já que o sistema INFORMAT não pode calculá-lo por desconhecimento de $QREQ_i$, para cada lote.

VI. CONCLUSÃO

Apresentou-se neste artigo a actividade do controlo da produção numa linha de montagem de uma unidade industrial. Descreveu-se o processamento sob a perspectiva de comunicação entre diferentes sistemas. Foram analisadas as actividades locais de cada sistema interveniente no processo. Os meios de comunicação e suas características foram estudados. Discutiu-se a interacção dos processos com a informação e sua actualização. No capítulo 7 de [1] detalha-se o algoritmo implementado para controlo de concorrência de acessos simultâneos por diferentes sistemas que partilham entre si os mesmos dados.

Faz-se notar que a apresentação teve como objectivo pôr em evidência os pontos essenciais do processo, não se tratando de uma descrição exaustiva.

Para estudo do software desenvolvido, remete-se o leitor para o manual [3].

Agradecimentos

No decurso do trabalho aqui relatado houve numerosas discussões com o Eng.º Rogério S. Carapuça que se agradecem. Reconhece-se também publicamente a disponibilidade de todo o pessoal do EIM envolvido no projecto da informatização do seu controlo da produção.

BIBLIOGRAFIA

[1] — Maria M. M. de A. Veloso, "Implementação de um Sistema de Informação para o Controlo da Produção: Estruturação Lógica e Operação Distribuída", Tese de Mestrado, Dept. Eng. Electr., IST, Julho 1984.

[2] — Jeffrey Ullman, "Principles of Database Systems", Computer Science Press, Rockville, Maryland, 2nd edition, 1982.

[3] — Maria M. M. de A. Veloso, "Manual de Utilização para as Aplicações das Secções Técnica, Produção e Contabilidade Analítica", Relatório CAPS/EIM, Junho 1984.

AS VARIÁVEIS MINERALÚRGICAS NO PLANEAMENTO MINEIRO*

JOSÉ QUINTINO ROGADO
Professor do IST — CVRM (INIC)

RESUMO

Justifica-se o interesse em utilizar variáveis mineralúrgicas na avaliação, concepção e controle do projecto mineiro.

Apresentam-se métodos globais de optimização usando tais variáveis e descreve-se o método de alocação local como forma mais conveniente de resolver o problema.

ABSTRACT

The interest of the utilization of mineralurgical variables for the assessment, design and control of the mining projects is explained.

Several global methods to tackle with these variables are presented. The so called local mehod *is develloped and it is shown to be the best way for solving such a problem.*

1. Tem vindo a ser reconhecida a vantagem de usar variáveis mineralúrgicas na avaliação de recursos minerais, na concepção dos respectivos projectos de exploração e na sua execução controlada [*1*, 1980, 1984; *5*, 1984; *7*, 1981; *8*, 1971/81].

Compreende-se a razão desta nova abordagem que, aliás, decorre da prática ainda habitual (na qual as principais variáveis ou atributos levados em conta são a mineralogia, os teores do minério tal qual, etc.), se se notar que, em termos monetários, a produção mineira é o «metal» recuperado, isto é, o metal contido *in situ*, diminuído das perdas inerentes à lavra e à concentração.

Deixando de lado a perda resultante do método de lavra, considere-se apenas a perda em metal introduzida pelo processo de concentração.

Será então (v. lista de símbolos)

$$M = R_m Z_a \qquad Q = R_p Z_c Q$$

Ora, fixados que seja(m) o(s) processo(s) de beneficiação, R_m ou R_p dependem de vários factores: Do próprio teor tal-qual, da mineralogia (composição mineralógica e textura) e da regulação do processo, quer quanto à operação de concentração, quer quanto à cominuição, da qual, por sua vez, depende a granulometria, uma vez fixada a textura.

Quer dizer, o par $\{R_m, Z_c\}$ ou $\{R_p, Z_c\}$ induz duas classes de equivalência:

- A classe i : tipo mineralúrgico.
- A classe j/i : ponto de funcionamento do processo para cada tipo mineralúrgico.

---

* Este texto serviu de base à comunicação «Nota sobre Economia de Sistema Mineralúrgico» paresentada pelo autor ao V Encontro Nacional de Engenheiros de Minas Portugueses em Nov./84.

Original recebido para publicação em 30/11/84.

Na metodologia anterior, onde as variáveis utilizadas se referiam ao minério tal-qual, apareciam:

- A classe tipo mineralógico ligada por inferências de lógica vaga à classe i.
- A classe teor tal-qual da qual derivam os critérios de rejeição denominados marginalistas.

Usando as variáveis mineralúrgicas, a abordagem é reconhecidamente mais directa.

A classe ixj define antes de mais nada as partes exploráveis em oposição às não exploráveis. Quer dizer, esta classe conduz à determinação do VAB médio:

$$\overline{VAB}(i,j) = R_m(Z_a, Z_c/i,j)\, Z_a\, q - p(Z_{ab}/i,j + b(Z_{ab}/i,j) + K$$
$$i \in \{1, \ldots n\}$$
$$j \in \{1, \ldots m/i\}$$

Se o $\overline{VAB}_{med} > V_o$ os blocos são «exploráveis», se o $\overline{VAB}_{med} < V_o$, não o são.

Trata-se de rejeição análoga à baseada no teor tal-qual, quando se utiliza o critério marginalista mineiro. Mas é mais rigorosa porque dá conta da dependência, do metal contido, de R_m, o qual, como já vimos, contém muita informação.

Este critério pode ser demasiado forte, como aliás já acontecia com a rejeição pelo teor tal-qual. Tais rejeições justificam-se quando houver necessidade, por razões estruturais ou conjunturais, de trabalhar com períodos de retorno muito curtos. Adoptado este critério, a reserva explorável ficará definida e o seu complementar será eventual recurso que se procurará deixar *in situ*.

É óbvio que, se tal não for possível, isto é, se houver que desmontar blocos «inframarginais», ter-se-á que adoptar segundo critério de rejeição, recalculando o VAB, deduzidas as despesas já realizadas por conta da reserva dita explorável [*4*, 1975].

Em certos casos, como se sabe, o desmonte de um bloco explorável acarreta o arranque de um cone de influência; e o bloco só será explorável se o cone for «positivo» [*2*, 1976; *3*, 1969; *6*, 1979].

Independentemente destas considerações, há todavia um ponto importante a salientar. Quando se utiliza o teor tal-qual como parâmetro de selecção, a função critério é aditiva e a optimização consiste em escolher os blocos cujo teor é superior ao teor de rejeição; ao utilizar-se o par $\{M_m, Z_c\}$ a situação não é tão simples. Fixado R_m, sabe-se, como é óbvio, estabelecer relação de ordem entre os teores dos concentrados. A optimização consistirá então em reter os blocos com Z_c superior ao teor do concentrado de rejeição a R_m^* fixado [*8*, 1976].

Todavia, R_m ou R_p podem libertar-se e o problema põe-se na forma como se há-de construir o VAB optimal.

2. Os métodos usados para resolver esta dificuldade consistem em procurar pares optimais para cada bloco ou painel.

Na verdade, há dois caminhos para optimizar tais pares. Qualquer deles exige o conhecimento das funções $R_m(Z_c)$ ou $R_p(Z_c)$ — Funções de Lavabilidade.

No método que chamaremos de alocação global, a função $R_p(Z_c)$* é suposta contínua com derivada contínua (ambas pelo menos contínuas aos bocados) e conhecida num compacto limitado.

No outro método que denominaremos de alocução local, a função $R_p(Z_c)$ é conhecida em conjunto finito de pontos (normalmente são mais de seis). Vejamos com mais algum detalhe ambos os métodos.

Método de alocação global

Como se sabe, o mercado de minérios tem sido dominado pelos complexos químico-metalúrgicos, do que resulta que, em cada caso concreto, duas situações podem ocorrer:

- Minérios em que o teor de rejeição do concentrado se encontra abaixo do máximo da função $R_p q$;
- Minérios em que sucede o contrário.

No primeiro caso, há todo o interesse em vender concentrados com teor tão próximo quanto possível do teor que maximiza $R_p q$; no segundo, devem produzir-se concentrados com teor ligeiramente superior ao teor de rejeição comercial.

Assim, a alocução optimal dos minérios do primeiro tipo, faz-se maximizando o critério

$$Q_i\, R_p^i\, (Z_c^i)\, q^i\, (Z_c^i) \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Mostra-se [*9*, 1972] que a alocução optimal corresponde a

$$\frac{d}{dZ_c^i}\, (R_p^i\, q^i) = 0$$

isto é, corresponde a optimizar, em cada bloco, o produto $R_p q$.

A alocução optimal para minérios do segundo tipo faz-se maximizando [*9*, 1972]

$$Q_i\, R_p^i$$

* Ou R_p.

com a restrição

$$Q_i \; R_p^i \; (Z_c^i - Z_o) = 0$$

o que conduz ao sistema de n equações, em geral não linear

$$R_p^i \Big/ \frac{dR_p^i}{dZ_c^i} + Z_c^i = C \overset{te}{-} \text{(1)}$$

Este resultado pode escrever-se, pondo $Z_c^i - Z_o = \tau^i$

$$\frac{dR_p^i}{d\tau^i} \; \frac{\tau^i}{R_p^i} = -1$$

Isto é, a optimização alcança-se, alocando a cada bloco os pontos de funcionamento onde a elasticidade do rendimento em peso em relação ao teor do concentrado é igual a -1.

Claro que em ambos os casos, os algoritmos descritos só serão úteis quando a função $R_p(Z_c)$ tiver expressão analítica.

Nas aplicações, porém, o que se conhece são alguns pontos dessa função, após efectuada certa tipologia, construída habitualmente com ensaios mineralúrgicos padrão.

Consequentemente, haverá para cada tipo mineralúrgico uma aplicação discreta $R_p \rightarrow Z_c$. Os volumes v_i do tipo i a tratar com a regulação j corresponderão apenas a pontos do espaço discreto $R_p \times Z_c$.

Nestas condições, o critério será [*8*, 1975]

$$R_p^{ij} \; v_{ij} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1, \ldots, n\} \\ i \in \{1, \ldots, m|i\} \end{array}$$

com as seguintes restrições

$$\sum_{j}^{m|i} v_{ij} = D_i$$

$$R_p^{ij} \; v_{ij} \; (Z_c^{ij} - Z_o) = 0$$

Nesta forma discreta, o problema da alocução é resolúvel por programação linear [*8*, 1975].

3. Em qualquer das duas variantes (contínua e em geral não linear, discreta e linear) este método global baseia-se em tipologia prévia onde será válida dada relação média $R_p(Z_c)$(2) para cada um dos subjazigos tipologicamente criados.

Aplicar este método directamente aos pequenos blocos de selecção conduziria à resolução de sistemas de equações que poderiam ter algumas dezenas de milhar de equações. *Com a agravante de implicar programação inteira.*

Em todo o caso, ficaria, deste modo, alocado a cada bloco o par $\{R_p, Z_c\}$(3) optimal a que corresponderia o VAB global máximo.

Seria, portanto, possível verificar se tal VAB excederia certo valor mínimo fixado, Vo.

Porém, se não se houvesse passado pela alocação ao nível do bloco, o resultado seria válido enquanto se pudesse aceitar a conjectura de que os blocos do mesmo tipo mineralúrgico constitutivos de um painel mineralúrgico teriam funções de lavabilidade idênticas. E sendo estas fortemente influenciadas pela mineralogia, textura, granulometria e teor tal-qual, é evidente que estes atributos teriam obrigatoriamente de figurar na matriz das contingências, evidentemente além do par $\{R_p, Z_c\}$(4) padrão.

Tudo isto implicaria a realização, para cada tipo, de krigagens e/ou cokrigagens a que se seguiriam amostragens compósitas para obter réplicas médias dos diversos tipos mneralúrgicos.

Sobre tais amostras médias efectuar-se-iam testes de bancada ou piloto para construção de funções de lavabilidade discretas, as quais entrariam então na optimização global acima descrita.

No caso de haver que rejeitar blocos, o critério poderia ser descartar os de menor teor tal-qual ou, o que provavelmente seria o mesmo, os de menor produto $R_p Z_c$. É bem claro que este segundo critério seria o único correcto, se fosse possível a ele recorrer, o que não seria o caso ao usarem-se painéis mineralúrgicos formados por vários blocos.

Porém, efectuadas as rejeições, poderia ser necessário construir nova tipologia, efectuar novas amostras médias e novos testes para se obterem novas funções $\{R_p, Z_c\}$(5), as quais se utilizariam no novo processo de optimização (v. Fig. 1). Trata-se como se vê, de método iterativo, trabalhoso, com certeza demorado e dispendioso, que não se aconselha quando existe a presunção de realizar rejeição e de a fazer variar em face de conjuntura económica instável.

4. Método de alocação local

Por isso mesmo foi desenvolvido método muito mais apropriado que a seguir se descreve resumidamente.

Mostra-se que para constituir a função optimal $R_m(S)$(6), convexo superior, basta utilizar o operador *tafrach* (7) [*8*, 1974/75].

---

(1) Ou $R_{,n}(Z_c)$.

(2) Se no primeiro caso a fórmula de venda for linear obtém-se também estas equações.

(3) Ou $R_m(Z_c)$.

(4) Ou $\{R_m Z_c\}$.

(5) Ou $\{R_m, Z_c\}$

(6) Ou M(C).

(7) Em homenagem ao filósofo árabe Al-Nazzam (845 d.c.) que, para explicar o movimento, utilizou o conceito de salto (tafrach).

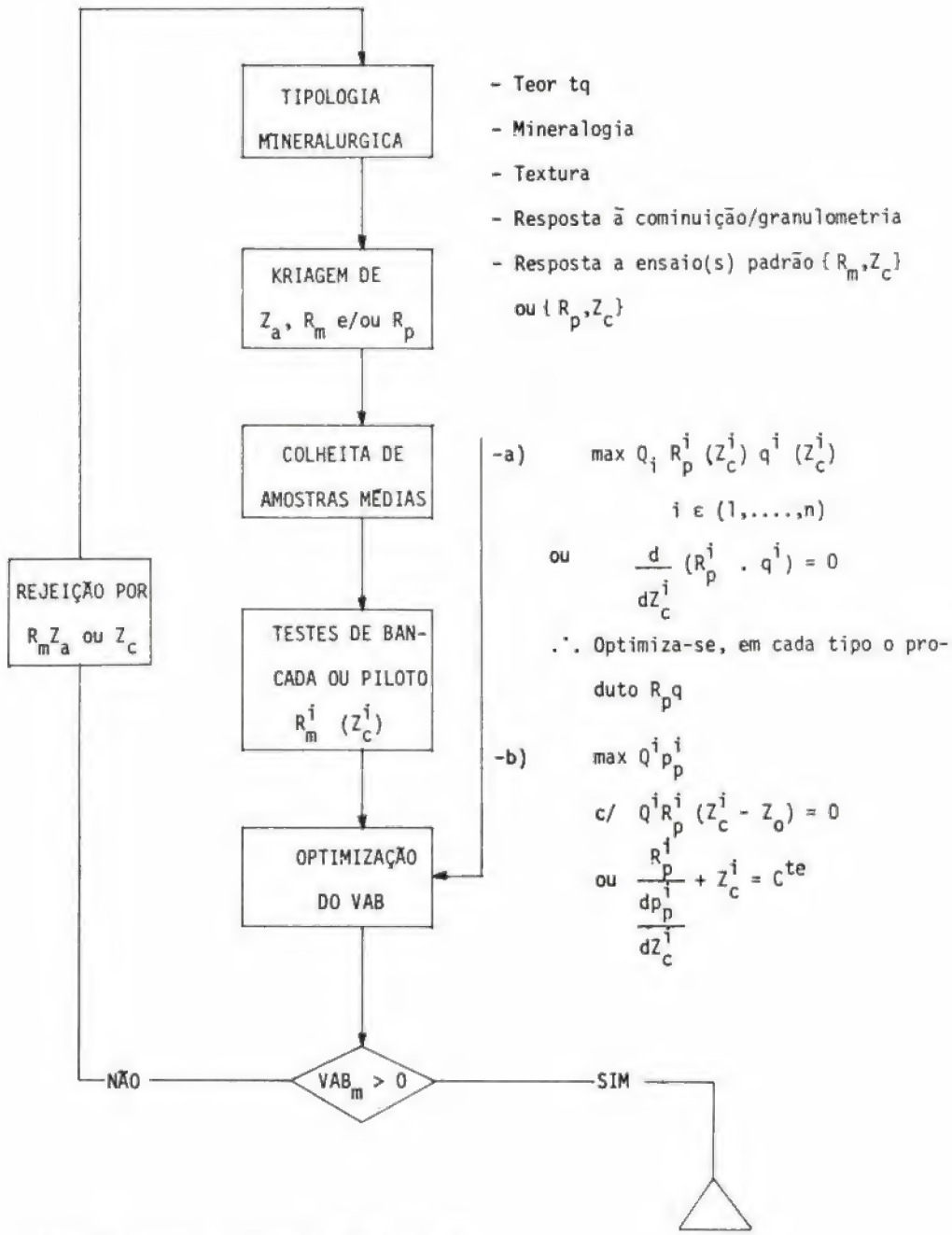


Fig. 1 - ALOCAÇÃO POR OPTIMIZAÇÃO GLOBAL

Este operador define-se como

$$\ddot{\cup} = \frac{\Delta R_p}{\Delta(R_m Z_c)} = \frac{\Delta R_p}{\Delta(R_p Z_c)}$$

E estabelece-se sobre as funções de lavabilidade discretas (normalmente bastam 2 a 4 pontos) de cada bloco, permitindo construir relação de ordem que, devidamente frequentada, conduz ao convexo superior referido do conjunto de blocos e simultaneamente, fornece o teor global do concentrado, que é assim um atributo livre.

O método autoriza portanto a rejeição de blocos quando o VAB não é satisfatório, exigindo apenas reordenação dos tafrach, que permitirá construção de novos VAB para diversos concentrados globais sem necessidade de utilizar qualquer combinatória.

4. A utilização do operador tafrach, sendo muito mais poderosa (e portanto económica) do que os algoritmos de optimização global, implica, todavia, a construção de alguns pontos da função $R_p(Z_c)$ sobre pequenas amostras e a sua subsequente estimação ao nível do bloco.

É esta mudança de suporte que importa, portanto, analisar.

Na verdade o essencial consiste em construir a função de libertação característica da textura de cada tipo mineralúrgico, o que implica análise textural de amostras (superfícies polidas, p. ex.) utilizando analizador de texturas com uma janela que simule um grão de calibre $\varnothing$ que será o suporte dos histogramas de Z_a.

A segunda etapa poderá ser a resolução da equação integral

$$\int_0^y F_v(Z_a, q(\varnothing), dy) = F(y/\varnothing)$$

Consistirá então em modelar histogramas parametrizados em $\varnothing$, dados

$E_v(Z_a/\varnothing) = E_v(Z_a)$: não acorre cominuição diferencial

$$\text{e} \quad D_{\varnothing/v} = \overline{\gamma(v, v)} - \overline{\gamma(s, s)} + \sigma^2_{\varnothing/s}$$

Esta última relação resulta de

$$\sigma^2_{s/v} = \overline{\gamma(v, v)} = \overline{\gamma(s, s)}$$

$$\sigma^2_{\varnothing/s} = \overline{\gamma(s, s)} - \overline{\gamma(\varnothing,\varnothing)} \rightarrow \overline{\gamma(s, s)} = \overline{\gamma(s, s)} - \sigma^2_{\varnothing/s}$$

$$\sigma^2_{\varnothing/v} = \overline{\gamma(v, v)} - \overline{\gamma(\varnothing,\varnothing)}$$

donde

$$\sigma^2_{\varnothing/v} = \overline{\gamma(v, v)} - \overline{\gamma(s, s)} + \sigma^2_{\varnothing/s}$$

Ora, exprimentalmente conhece-se, para dado tipo mineralúrgico,

$E_v(Z_a)$	obtido por krigagem ou krigagem disjuntiva.
$\overline{\gamma(v, v)}$	admitindo que há variograma «in situ».
$\overline{\gamma(s. s)}$	admitindo que há variograma nas amostras submetidas ao analisador de texturas.
$\sigma^2_{\varnothing/s}$	por estatística directa obtida no analisador de texturas.

A integração pode pois fazer-se por simples ajustamento de certa função de repartição, com um ou mais parâmetros q, que apenas dependam de 1.º e 2.º momentos, aos histograma sexperimentais obtidos no analisador de texturas, fixado $\varnothing$. Ou pode, obviamente, tentar-se resolver a equação integral.

Seguidamente, há que construir as granulometrias alargadas, dependentes, como vimos, da textura e do tipo e regulação da cominuição. Aqui há grande liberdade de métodos: Poder-se-ão usar técnicas de bancada ou técnicas piloto (estas de aconselhar, nomeadamente quando se prevê utilizar moagem autógena), etc.

Em qualquer caso, obter-se-á, para cada tipo mineralúrgico, classes de curvas granulométricas parametrizadas na composição das cargas, no tempo de residência, na diluição das polpas, etc.

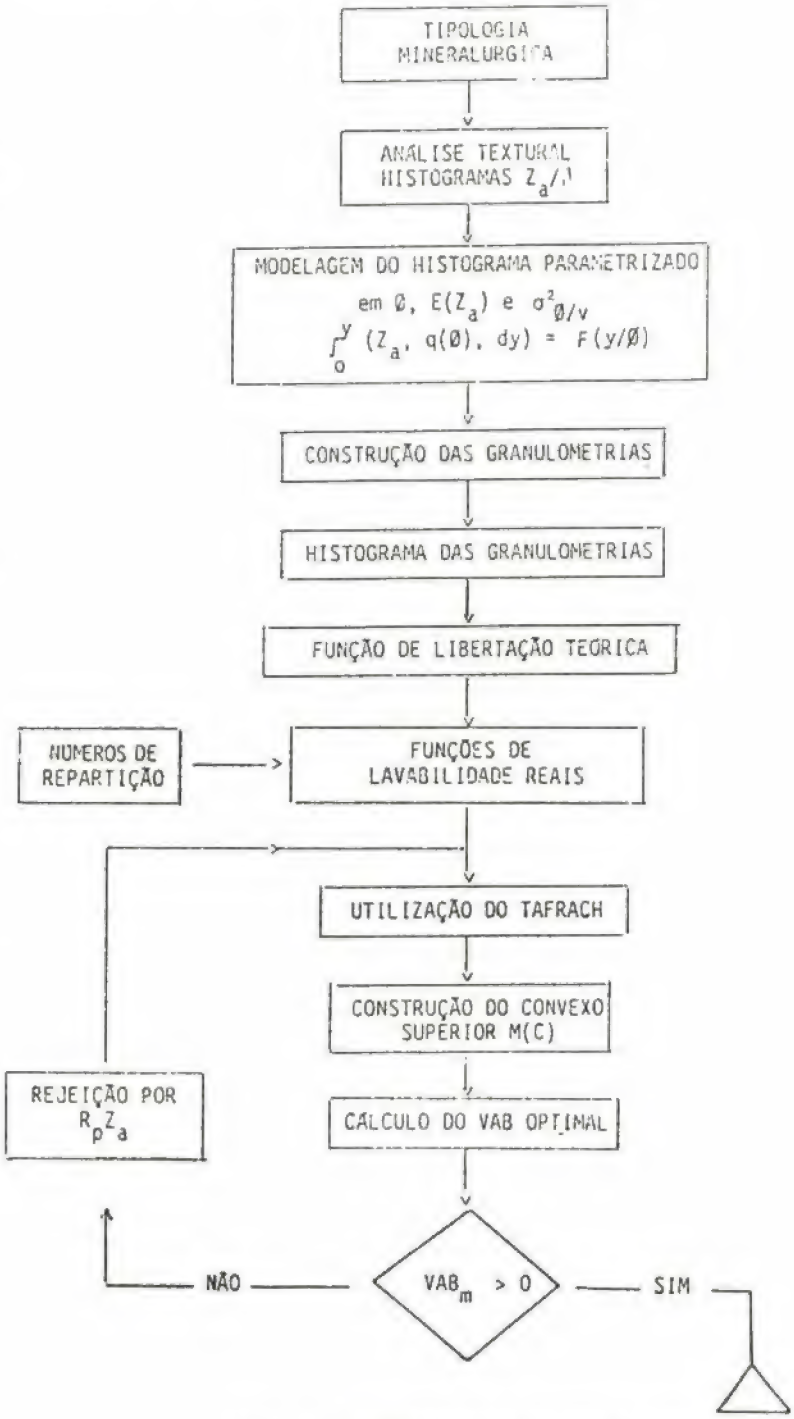


FIG. 2 - ALOCAÇÃO POR OPTIMIZAÇÃO LOCAL

A construção dos histogramas das granulometrias alargadas limita-se, como é óbvio, ao estabelecimento de combinações lineares dos histogramas modelados $F_v(Z_a, q/\varnothing), y)$, os quais são válidos para os blocos v por força de $E_v(Z_a)$ e $\sigma^2_{\varnothing/v}$ que foram utilizados na determinação ou ajustamento de q.

Vê-se, ainda, que a modelagem descrita é inteiramente dispensável, quando se disponha de $F(y/\varnothing)$ médios baseados em grandes amostras representativas e haja sido possível por krigagem alocá-lo aos blocos v.

Os histogramas das granulometrias alargadas fornecem directamente, como é óbvio, as funções de lavabilidade teóricas, isto é, $F_p(Z_a)$ teóricas, por simples introdução de critério de rejeição.

Como passo seguinte introduzem-se as funções de repartição que traduzam o processo mineralúrgico e que, a partir das funções $R_p(Z_a)$ teóricas, fornecem as suas réplicas «reais». (Não se tratará nesta oportunidade deste importante passo do método).

Fica-se assim em condições de aplicar o operador tafrach que conduzirá à construção do convexo superior M(C) do qual se pode deduzir facilmente o VAB optimal fixado Z_c [**8**, 1976].

E, assim sendo, as rejeições, caso haja que efectuá-las, implicarão apenas a reordenação do tafrach (v. Fig. 2).

Finalmente deve salientar-se que este método estrutura mudança de suporte com significado ao nível das variáveis mineralúrgicas.

LISTA DOS SÍMBOLOS

M	— «metal» recuperado
R_m	— rendimento em metal ou recuperação
Z_a	— teor (ou concentração) tal-qual em metal
Q	— «tonelagem» tal-qaul
C	— «tonelagem» do concentrado
R_p	— rendimento em peso
Z_c	— teor (ou concentração) do concentrado em metal
Z_{ab}	— teor (ou concentração) do concentrado em metal «acessoório»
q	— «valor da unidade» de metal
$\overline{VAB}(i, j)$	— valor bruto acrescentado médio por unidade de peso tal-qual
i	— tipo mineralúrgico genérico
n	— número de tipos mineralúrgicos
j/i	— ponto de funcionamento ou processo de tratamento genérico, fixado o tipo i
m/i	— número de pontos de funcionamento ou de processos de tratamento, fixado o tipo i
p	— multa por unidade tal-qual
b	— benefício por unidade de peso tal-qual
k	— despesas de lavra, concentração, gastos gerais, despesas de capital, etc., por unidade de peso tal-qual
$V_o > 0$	— VAB médio limite económico de explorabilidade
v_i	— peso do bloco ou painel do tipo mineralúrgico i
v_{ij}	— bloco ou painel do tipo i tratado no ponto de funcionamento ou processo j/i
$\overset{\cup}{\cup}$	— operador **tafrach**
Δ	— transferência de um ponto de funcionamento para outro no espaço $R_p \times Z_c$
$\varnothing$	— calibre ou suporte
$F_v(Z_a, p(\varnothing), y)$	— histograma cumulado (função de repartição) do bloco v
$q(\varnothing)$	— parâmetro da função de repartição (ou da respectiva densidade, se existir) — escalar ou vectorial
$F(y/\varnothing)$	— histograma médio comulado experimental, obtido pelo analisador de texturas fixado o suporte $\varnothing$. Ou se supõe específico da textura de cada tipo mineralúrgico ou por krigagem se faz a sua alocução a cada bloco v
D_i	— massa do sub-depósito i

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARMSTRONG, M., 1980. Aplication de la géostatistique aux problèmes de l'estimation du charbon, Tese, E.N.S.M.P., Paris, França.
— 1984, Using Geostatistics to predict the characteristics of washer coal, **Mining Engineering, 3, 4,** 369-373, USA.

[2] BONGARÇON, D. F., 1976. A new method for open pit design. Parametrization of the final pit contour, N-476 Fontainebleau, França.

[3] LERCHS, H., GROSMANN, I., 1969. Optimum design of open pit mines, **C.I.M. Bulletin, 58,** 633, 77-54. Sanadá.

[4] MATHERON, G., 1975. Le parametrage technique des reserves. Note Geostatistique n.° 134, Fontainebleau, França.

[5] MILLER, V., 1984. Estimate and incorporation of metallurgical data in a mineralization model, **Mining Enginerring,** Março 1984, 270-275, USA.

[6] MUGE, F. O., 1979. Determinação do contórno final dum desmonte a céu aberto («Ultimate Pit»), 1.° Seminário de Geomatemática, **Técnica** 451/452 (1979), 261-270, Lisboa, Portugal.

[7] PEREIRA, H. P., 1981. Análise estrutural e seus reflexos na avaliação económica de recursos minerais. Tese, Laboratório de Mineralurgia e Planeamento Mineiro, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.

[8] ROGADO, J. Q., 1971. Optimização, por um método directo, da alocação de um minério a dois processos de tratamento, 1.° CHILAGE, Lisboa-Madrid, Portugal.
— 1974. An optimization method for the mining and beneficiation of ore bodies, 12th APCOM, Golden--Colorado, USA.
— 1975. Sequential optimization method dressing control of ore bodies (I), 7.° Pribram in Science and Technique, Pribram, Checoeslováquia.
— 1975. Sequential optimization method for dressing control of ore bodies (II), 13th APCOM, Clausthal, R.F.A.
— 1975. An optimization method for the mining and beneficiation of ore blocks, **International Journal of Processing**, 2 (1975), 59-76. Amsterdão, Holanda.
— 1976. Nota sobre a apropriação dos recursos minerais. Programador nacional de empreendimentos mineiros, **Técnica**, 434 (1976), 281-287, Lisboa, Portugal.
— 1977. The global parametrization of sets of several different ore deposits, 8.° Pribram in Science and Technique, Pribram, Checoeslováquia.
— 1981. An optimal policy for controlling a set of non--interacting elementary process, entregue para publicação na **Técnica**, Jan. 1981, Lisboa, Portugal.
[9] TILLE, R., 1972. Étude des conditions de concentration qui conduisent à une exploitation optimale d'une ensemble de gisements miniers. **Annales des Mines de Belgique**, 1972, Bruxelas.

PROCESSOS MARKOVIANOS DE RENOVAMENTO NA MODELAÇÃO DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

M. F. RAMALHOTO
Prof. Associado
Dep. de Matemática, IST

RESUMO

Este artigo consta de duas secções (parte A e parte B) e uma breve introdução onde se fazem alguns comentários sobre o método e conteúdo do ensino de processos estocásticos a quem tem de modelar sistemas estocásticos.

Na parte A apresenta-se uma resenha dos resultados mais importantes da teoria dos processos Markovianos de renovamento e uma breve discussão sobre as vantagens destes processos. Calcula-se a matriz Markoviana de renovamento, $R(t)$, e o vector próprio à esquerda correspondente ao valor próprio um da matriz $Q(+\infty)$, ν, no caso de espaço de estados infinito numerável, especialmente, quando a matriz semi-Markoviana, $Q(t)$, é tridiagonal. Neste último caso obtém-se uma fórmula explícita para as componentes de ν, e mostra-se que a transformada de Laplace-Stieltjes dos elementos da matriz $R(t)$, $r(s)$, formam um sistema de equações lineares recorrentes de 2.ª ordem. No entanto, só para o «caso exponencial» se conseguiu encontrar a solução analítica explícita deste sistema. Esta solução é dada em termos de séries confluentes hipergeométricas.

Na parte B tecem-se breves considerações sobre a literatura existente respeitante às aplicações destes processos à vida real; e mostram-se situações (relativas à visibilidade de alvos que se movimentam em terrenos acidentados) que ilustram a maneira de usar a teoria dos processos Markovianos de renovamento na modelação de sistemas estocásticos.

Original recebido para publicação em 7/4/85.

ABSCTRACT

This paper begins with the presentation of some views on the teaching of applied stochastic processes.

The paper is dividid into two parts. Part A presents a summary of the Markov renewal theory as well as a discussion of its advantages. The main purpose of this part of the paper is to calculate the Markov renewal matrix, $R(t)$, and the left eigenvector associated with the eigenvalue one of the matrix $(Q+\infty)$, ν, in the case of infinite state spaces, specially, when the semi-Markov matrix, $Q(t)$, is tridiagonal. In the tridiagonal case an explict formula for the components of the vector ν is given, and the Laplace-Stieltjes transform of these elements of the matrix $R(t)$, are expressed as a system of linear equations of «second order recurrence type». Explict analytical solution for $r(s)$, in terms of confluent hypergeometric series, are obtained but only for the exponential case.

In part B it is shown how to use the Markov renewal theory to solve a real life problem on the visibility of a moving target. Guidelines on the literature of the applications of Markov renewal theory to real life modelling are also presented.

INTRODUÇÃO

Modelar sistemas estocásticos é uma arte e como tal aprende-se fazendo. Mas a aprendizagem é longa e deve ser precedida de pelo menos duas fases preliminares. A primeira consiste em aprender os conceitos básicos da teoria dos processos estocásticos

mais usados, nomeadamente, cadeias de Markov, processos de renovamento, processos Markovianos, processos Markovianos de renovamento e Martingalas. Considera-se que neste contexto o estudo da teoria de processos estocásticos não deve seguir uma abordagem baseada na teoria da medida, por esta ser demasiado exigente em termos matemáticos, demasiado abstracta e de um modo geral dando pouca ênfase à interpretação intuitiva e probabilística das caracterísctícas fundamentais dos processos estocásticos; mas, por outro lado, também não deve ser feita uma aprendizagem tipo «livro de receitas» por não permitir uma compreensão teórica adequada que possibilite responder às exigências de modelação de problemas práticos, dada a maneira superficial e simplista com que aborda as questões importantes relativas aos processos estocásticos. O objectivo deve ser a compreensão dos processos estocásticos e suas possibilidades e limitações sob um ponto de vista intuitivo e probabilístico.

A outra fase, que aliás vem na sequência da anterior, e a que alguns autores chamam «estudo de modelos», consiste em analisar e compreender as dificuldades que os investigadores aplicados tiveram de vencer, ao modelar os seus problemas concretos através de processos estocásticos. O estudo destas aplicações deve ser tomado apenas como um passo intermédio na aprendizagem de como fazer a modelação do sistema em estudo. É necessário examinar como estes utilizadores de processos estocásticos trataram «messy data» (dados sem interesse, dados desorganizados, excessivos ou insuficientes são infelizmente o que aparece com mais frequência), complexidade do sistema, sistemas para os quais a teoria existente é insuficiente ou mesmo inadequada, etc. Note-se contudo que o sistema que se está a estudar, de um modo geral, terá sempre particularidades especiais, por exemplo, as dependências estocásticas que existem no nosso problema podem diferir das dependências existentes em problemas já estudados, que se apresentam em tudo o mais semelhantes. Mais especificamente, os modelos já existentes que serviram para resolver determinados problemas concretos, não devem ser considerados como receitas ou descrições de como fazer relativamente ao problema agora a resolver. Estes modelos devem ser encarados como exemplos a conhecer e a estudar, através dos quais se podem abrir perspectivas de uma maior sensibilidade e espírito crítico, às dificuldades a enfrentar e às soluções a procurar para o problema em estudo.

Na sequência do que se acaba de expor, neste artigo, tratar-se-á a teoria dos processos estocásticos e suas aplicações segundo a perspectiva proposta.

Os processos estocásticos escolhidos são os processos Markovianos de renovamento porque têm mostrado ser úteis na modelação de sistemas complexos e têm a vantagem de incluir a maior parte dos processos estocásticos padrão: cadeias de Markov, processos Markovianos em geral e processos de renovamento.

Na primeira parte (Parte A — Características e resultados mais importantes da teoria dos processos Markovianos de renovamento: vantagens e desvantagens na aplicação destes processos), começa-se por fazer um pequeno resumo da teoria dos processos Markovianos de renovamento, relacionando-os com as cadeias de Markov e os processos de renovamento e indicando as suas propriedades mais fundamentais. Apresentam-se também os prós e contras da teoria Markoviana de renovamento e calcula-se a matriz Markoviana de renovamento, $R(t)$, e o vector próprio à esquerda associado ao valor próprio um da matriz $Q(+\infty)$, ν, no caso de espaço de estados infinito numerável ,especialmente, quando a matriz Semi-Markoviana, $Q(t)$, é tridiagonal. Neste último caso obtém-se uma fórmula explícita para as componentes do vector ν, e mostra-se que a transformada de Laplace-Stieltjes dos elementos da matriz $R(t)$, $r(s)$, formam um sistema de equações lineares recorrentes de 2.ª ordem. No entanto, só para o «caso exponencial» se consegue encontrar a solução analítica explícita deste sistema a qual é dada em termos de séries confluentes hipergeométricas. Salienta-se ainda as limitações destes processos nas aplicações, devido às dificuldades de cálculo do vector próprio ν e da matriz Markoviana de renovamento, $R(t)$, no caso geral de espaço de estados infinito numerável. A Parte A foi já integralmente publicada em Ramalhoto (1984).

Na segunda parte (Parte B — Utilização de processos Markovianos de renovamento em modelação de sistemas estocásticos) apresentam-se situações que ilustram a maneira de usar a teoria dos processos Markovianos de renovamento (e o êxito alcançado) na modelação de sistemas estocásticos da vida real.

A. CARACTERÍSTICAS E RESULTADOS MAIS IMPORTANTES DA TEORIA DOS PROCESSOS MARKOVIANOS DE RENOVAMENTO: VANTAGENS E DESVANTAGENS NA APLICAÇÃO DESTES PROCESSOS

A.1 — CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Os processos Semi-Markovianos (S-M) podem ser vistos como processos estocásticos que generalizam as Cadeias de Markov (C.M.) em tempo discreto e contínuo permitindo que os intervalos de tempo entre sucessivas transições sejam variáveis aleatórias (v.a.) não-negativas com uma distribuição de probabilidade qualquer (e não necessariamente exponencial como

nos processos Markovianos), a qual poderá depender ou não do estado de partida e do estado de chegada.

Suponhamos, por exemplo, que temos k funções de distribuição $F_1, \ldots, F_k$ e que sabemos que o processo está no «estado j» num dado instante se a sua função distribuição corrente for F_j. Consideremos ainda que a sequência de estados do processo é determinada por uma C.M. com uma matriz (de probabilidade) de transição, $P=[p_{ij}]$, definida do modo seguinte: Se o processo está no estado i a probabilidade do estado a ser visitado imediatamente a seguir ser j é dada por p_{ij}. O processo estocástico pontual determinado por uma sequência de intervalos deste tipo é chamado um processo S-M (em que $F_j=F_{i,j}$ como veremos mais adiante). Muitos autores chamam a este processo pontual — Processo Markoviano de Renovamento (M.R.) — reservando o termo de processo S-M para o estado do processo como uma função do tempo. Esta é, aliás, a nomenclatura seguida neste artigo.

A importância da teoria Markoviana de Renovamento reside fundamentalmente no seu amplo domínio de aplicabilidade quer a nível teórico (no estudo de outros processos estocásticos mais complexos tais como os processos semi-regenerativos) quer a nível prático, como mais adiante se referirá. Situação idêntica se verificava já nos processos de renovamento, os quais só por si não são especialmente interessantes mas a sua teoria (em que a equação de renovamento, cuja solução é a função de renovamento, é capaz de explicar e fornecer todas as quantidades de interesse prático ligadas ao processo, ver Feller (1966)) representa um dos instrumentos mais valiosos dentro da teoria das probabilidades aplicadas.

Os esforços de investigação em Processos M.R. orientam-se, em geral, para o desenvolvimento da teoria das equações M.R. e do modo como elas aparecem no estudo dos processos semi-regenerativos (i.e. processos que, geralmente, não são Markovianos mas que ainda possuem a propriedade Markoviana forte em certos instantes escolhidos aleatoriamente; um processo M.R. pode então ser «embedded» nestes instantes e a partir daí podem escrever-se as equações M.R. correspondentes, cujo comportamento vem permitir estudar certas características de interesse do processo semi-regenerativo).

As equações M.R. formam um sistema de equações integrais que generalizam de um modo natural e intuitivo a equação de renovamento, dos processos de renovamento. A solução deste sistema baseia-se fundamentalmente na matriz M.R., R(t), a qual generaliza a função de renovamento. Para detalhes ver Çinlar (1969, a). Este artigo «survey» é de importância fulcral dentro da teoria dos processos M.R.; o método e técnicas usados neste artigo são muito semelhantes aos aplicados à teoria do renovamento em Feller (1966).

A teoria dos processos M.R., sob um ponto de vista formal, está quase completamente feita, visto que as questões mais relevantes estão identificadas e razoavelmente compreendidas. A literatura sobre estes processos estocásticos encontra-se espalhada por todos os periódicos de relevo ligados à chamada Matemática Aleatória (em oposição à Matemática Determinística) e suas diversas aplicações à Biologia, Engenharia, Medicina, Psicologia, etc. No entanto, só agora começa a fazer parte dos livros de texto sobre processos estocásticos aplicados, embora tenha entrado na literatura de investigação há cerca de 30 anos e a sua aplicação a tópicos como, por exemplo, Filas de Espera venha de longa data; Finch (1959) estudou o processo partida de um fila de espera M|G|1 (processo chegada, Poisson, M, tempo de serviço, variável aleatória com uma distribuição qualquer, G, e número de servidores, 1) através de um processo M.R.

Os processos Semi-Markovianos, tal como os entendemos neste artigo, foram introduzidos por Lévy (1954) e Smith (1955) sensivelmente na mesma altura mas de forma independente. Mais ou menos pela mesma data Takács (1954) e (1957) estudou um processo que sob vários pontos de vista é equivalente ao processo Semi-Markoviano.

O termo processo M.R. é devido a Pyke (1961, a) que analisou extensivamente vários aspectos dos processos M.R. numa série de artigos, Pyke (1961, b), Pyke e Schaufele (1964) e (1966).

É curioso notar que, até 1960 foram publicados apenas uma meia dúzia de artigos sobre estes processos mas que em 1972 tinham já sido publicados sobre eles mais de trezentos artigos. Esta rápida expansão do estudo destes processos deve-se principalmente à simplicidade da teoria, aliada ao reconhecimento do seu vasto campo de aplicações teóricas e práticas.

O «Primeiro Simpósio Internacional sobre Processos Semi-Markovianos e suas Aplicações», realizou-se em Bruxelas, Bélgica, de 4 a 7 de Junho de 1984; a maior parte das comunicações apresentadas dizem respeito a aplicações destes processos.

Nesta secção iremos tratar de processos M.R. com espaço de estados, E, infinito numerável. A bibliografia apresentada até agora trata fundamentalmente de processos M.R. em que E é finito ou infinito numerável; no entanto, E pode ser um espaço arbitrário, ver Çinlar (1969, b). Outro tipo de extensão dos processos M.R. pode ser obtida fazendo com que estes processos representem generalizações dos processos com incrementos independentes estacionários, ver Çinlar (1972) e Ezhov e Skorokhod (1969).

A.2 — DEFINIÇÃO E ENQUADRAMENTO DOS PROCESSOS MARKOVIANOS DE RENOVAMENTO

Seja E um conjunto finito ou infinito numerável, N o conjunto dos inteiros não negativos, incluindo o zero, e R_+ o conjunto dos reais não negativos. Sejam X_n e T_n as seguintes variáveis aleatórias definidas num espaço de probabilidade (Ω, F, P),

$$X_n : \Omega \to E \,;\, T_n : \Omega \to R_+$$

e definidas para cada $n \in N$ de modo que $0 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots$.

Def. 1 — Estas variáveis aleatórias X_n e T_n para $n = 0, 1, \ldots$ formam um processo estocástico Markoviano de renovamento, $\{X_n, T_n; n \in N\}$, com espaço de estados E desde que:

$$P\,[X_{n+1} = j\,, T_{n+1} - T_n \leqslant t \,|X_0, \ldots, X_n; T_0, \ldots T_n] \quad (1)$$

$$= P\,[X_{n+1} = j\,, T_{n+1} - T_n \leqslant t|X_n]$$

para todo o $n \in N$, $j \in E$ e $t \in R_+$.

De um modo geral, considera-se que o processo é homogéneo no tempo, isto é,

$$P\,[X_{n+1} = j\,, T_{n+1} - T_n \leqslant t|X_n = i] = Q_{i,j}(t) \quad (2)$$

independentemente de n.

Def. 2 — À família de probabilidades,

$$Q(t) = [Q_{i,j}(t)] \quad (3)$$

para $i, j \in E$, $t \in R_+$, dá-se o nome de matriz Semi-Markoviana. (Convenciona-se que $Q_{i,j}(0) = 0$ para todo $i, j \in E$).

Note-se que para cada par (i,j) a função: $t \to Q_{i,j}(t)$ tem todas as propriedades de uma função de distribuição, excepto que:

$$\lim_{t \to \infty} Q_{i,j}(t) = Q_{i,j}(+\infty) \quad (4)$$

$$= P\,[X_{n+1} = j|X_n = j]\,;\, i, j \in E,$$

que nós designaremos por $p_{i,j}$, não é necessariamente um. Por outro lado é também fácil ver que:

$$p_{i,j} \geq 0 \text{ e } \sum_{j \in E} p_{i,j} = 1\,;\, i, j \in E\,, \quad (5)$$

isto é, $P = [p_{ij}]$ é a matriz de (probabilidade) transição da C.M., $\{X_n; n \in N\}$, com espaço de estados E. (Esta matriz e principalmente o seu vector próprio à esquerda correspondente ao valor próprio um, desempenha um papel de alguma importância no estudo de processos M.R.).

Se $p_{i,j} = 0$ para algum par (i,j) então $Q_{i,j}(t) = 0$ para todo o t e convenciona-se que $(Q_{i,j}(t))/p_{ij} = 1$. Com esta convenção, define-se

$$G_{i,j}(t) = \frac{Q_{i,j}(t)}{p_{i,j}} =$$

$$= P\,[T_{n+1} - T_n \leq t|X_n = i, X_{n+1} = j]\,; \quad (6)$$

para $i, j \in E$ e $t \in R_+$.

Ou seja para cada par (i,j) a função $t \to G_{i,j}(t)$ é uma função distribuição. Combinando este resultado com (1) podemos facilmente provar que as variáveis aleatórias, incrementos, $T_1 - T_0$, $T_2 - T_1$, ... são condicionalmente independentes dada a cadeia de Markov $X_0, X_1, \ldots$, e que a função distribuição de $T_{n+1} - T_n$ depende apenas de X_n e X_{n+1}.

É evidente que se o espaço de estamos E tiver apenas um ponto, os incrementos $T_1 - T_0$, ... são independentes e identicamente distribuídos e o processo $\{T_n; n \in N\}$ é de renovamento.

Um outro resultado importante é o seguinte:

Seja $i \in E$ um estado fixado à priori e sejam $T_0^i, T_1^i, \ldots$ os sucessivos T_n para os quais $X_n = i$, o processo $\{T_n^i; n \in N\}$ é de renovamento (possivelmente retardado).

Portanto, a cada estado i corresponde um processo de renovamento $\{T_n^i; n \in N\}$. A sobreposição de todos estes processos de renovamento dá o processo pontual $\{T_n; n \in N\}$. O i^ésimo^ processo de renovamento contribuirá com o ponto T_n se e só se $X_n = i$. Os estados destes pontos sucessivos, nomeadamente $X_0, X_1, \ldots$, formam uma cadeia de Markov. O nome do processo Markoviano de renovamento fica portanto totalmente justificado.

Considera-se que $\sup_n T_n(w) = +\infty$ para todo o $w \in \Omega$. Então, para qualquer $w \in \Omega$ e $t \in R_+$ existe algum inteiro n tal que $T_n(w) \leq t < T_{n+1}(w)$. Pode-se, deste modo, definir um processo de parâmetro (tempo) contínuo, $\{Y_t; t \in R_+\}$, com o espaço de estados E e, em que:

$$Y_t = X_n \text{ se } T_n \leq t < T_{n+1}\,. \quad (7)$$

O processo $\{Y_t; t \in R_+\}$ assim definido é um processo semi-Markoviano com espaço de estados E e matriz (de transição) Semi-Markoviana $Q(t) = [Q_{i,j}(t)]$.

Para uma melhor compreensão dos processos que estamos a estudar vejamos a seguinte interpretação

física dos processos Semi-Markovianos $\{Y_t ; t \in R_+\}$:

Pode pensar-se em Y_t como sendo o estado no instante t de um sistema ou de uma partícula que se move de um estado para outro com tempos de permanência aleatórios entre esses estados. O comprimento de um intervalo de permanência $[T_n, T_{n+1}]$ é uma variável aleatória cuja distribuição depende do estado X_n que está a ser visitado no presente e do estado X_{n+1} a ser visitado imediatamente a seguir. Os sucessivos estados visitados formam uma cadeia de Markov e, condicionados a essa sequência, os sucessivos tempos de permanência são independentes.

A justificação do nome atribuído ao processo $\{Y_t : t \in R_+\}$ é a seguinte:

Se uma matriz Semi-Markoviana Q(t) é da forma:

$$Q_{i,j}(t) = p_{ij}(1 - e^{-\lambda^{(i)} t}); \qquad (8)$$

pode provar-se que:

$$P[Y_{t+s} = j | Y_u ; u \leq t] = P[Y_{t+s} = j | Y_t] \qquad (9)$$

para todo o $t, s \in R_+$ e $j \in E$. Mais ainda, $P[Y_{t+s} = j | Y_t = i]$ é independente de t.

Ou seja um processo Semi-Markoviano com Q(t) dado por (8) torna-se um processo (homogéneo no tempo) de Markov. Qualquer processo Markoviano regular (i.e., se para quase todos os $w \in \Omega$: a) $t \to Y_t(w)$ for uma função contínua à direita e b) $\sup_n T_n(w) = +\infty$) é automaticamente um processo Semi-Markoviano. Para detalhes ver Çinlar (1969, a).

(Portanto, relativamente a processos Markoviano, a característica nova dos processos Semi-Markovianos é a da liberdade permitida na escolha das distribuições dos tempos de permanência como já se tinha referido. Esta liberdade, porém, é alcançada à custa da propriedade Markoviana (9), a qual em vez de ficar assegurada para todo o t, agora fica apenas assegurada nos pontos de transição T_n).

NOTA 1: Na definição de processos semi-Markovianos existem algumas questões que exigem um tratamento cuidadoso. Uma destas questões diz respeito ao facto de na definição de processos Markovianos de renovamento se permitirem transições de um estado para si próprio, o que faz com que tais transições não sejam notadas por um observador de realizações do processo Semi-Markoviano $\{Y_t; t \in R_+\}$. Assim quando em termos do processo Semi-Markoviano se consideram os instantes de ocorrência $T_0, T_1, \ldots$, como instantes de transição e $X_0 X_1, \ldots$ como os estados sucessivamente visitados é preciso tomar em consideração o facto de que duas ocorrências sucessivas nem sempre implicam uma mudança de estado.

Uma outra questão diz respeito a problemas de «extinção» e de «explosão» que não referiremos aqui. Ver Çinlar (1969, a).

A.3 — MATRIZ MARKOVIANA DE RENOVAMENTO

Um processo M.R. fica, em princípio totalmente definido através do conhecimento da sua matriz Semi-Markoviana $Q(t) = [Q_{i,j}(t)] = [p_{ij} G_{i,j}(t)]$. Em que a matriz $[Q_{i,j}(+\infty)] = [p_{ij}]$, é a matriz de transição da C.M. que governa a sequência de estados sucessivos e em que $G_{i,j}(t)$ representa a função distribuição do intervalo que começa no estado i e acaba no estado j.

Muitas das propriedades dos processos M.R. são obtidas directamente das propriedades correspondentes dos processos de renovamento (lembrar que, um processo M.R. com um estado é um processo de renovamento). Por exemplo, os instantes de ocorrência de um determinado estado, seja o estado i, $\{T_n^i ; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ formam como já se disse um processo de renovamento; portanto se é nestes pontos que estamos interessados, então só é necessário considerar a distribuição dos intervalos entre sucessivos instantes de ocorrência do estado i e usar a teoria do renovamento.

Em teoria do renovamento a função de renovamento desempenha um papel fulcral. Em processos M.R. também se define uma quantidade correspondente a que se dá o nome de matriz M.R., ou matriz de função de renovamento e que desempenha do mesmo modo um papel fundamental no estudo destes processos.

Seja $N_{i,j}(t)$ o número de visitas ao estado j durante o intervalo (0, t) quando é sabido que no instante zero o processo estava no estado i.

Def. 3 — Seja $R_{i,j}(t) = E[N_{i,j}(t)]$ e seja R(t) a matriz de ordem s ($s \leq \infty$) com elementos $R_{i,j}(t)$. A esta matriz dá-se o nome de matriz Markoviana de renovamento.

Quando $s = 1$, $\{N_{11}(t); t \geq 0\}$, define um processo de renovamento e consequentemente $R_{1,1}(t) = R(t)$ é a função de renovamento usual deste processo de renovamento.

Vejamos em seguida como é que a matriz M. R. está relacionada com a matriz S-M, Q(t).

$$Q^n_{i,j}(t) = P[X_n = j, T_n \leq t \mid X_o = i]; \; i, j \in E; \; t \in R_+ \qquad (10)$$

(para evitar trivialidades consideramos que para todo o $i \in E$, $P[T_o = T_1 = \ldots \; T_n = \ldots = 0 \mid X_o = i] = 0$).

Isto é, para $n = 0$

$$Q^0_{i,j}(t) = I(i,j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} ; t \geq 0 \qquad (11)$$

e para n = 1, 2, ...,

$$Q^{n+1}_{i,j}(t) = P[X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t \mid X_0 = i]$$

$$= \sum_{k \in E} \int_0^t d_u P[X_1 = k, T_1 \leq u \mid X_0 = i].$$

$$. P[X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t - u \mid X_1 = k]$$

$$= \sum_{k \in E} \int_0^t (d_u Q_{i,k}(u)) Q^n_{k,j}(t-u)$$

$$= \sum_{k \in E} Q_{i,k} * Q^n_{k,j}(t). \qquad (12)$$

Ou seja para que $X_{n+1} = j$ e $T_{n+1} \leq t$ dado que no instante zero o processo estava no estado i, é preciso que a 1.ª transição para um estado k qualquer tenha ocorrido num dado instante u inferior a t e depois, começando novamente desse estado (tomando «u» agora como origem dos tempos) as n transições restantes tenham levado não mais do que «t − u» unidades de tempo e tenham acabado no estado j.

Para cada estado fixo, seja j, com $j \in E$, os instantes T_n para os quais se tem $X_n = j$ formam um processo de renovamento (possivelmente retardado) que já designamos por $\{T^j_n; = 0,1,...\}$.

O número de ocorrências do estado j no intervalo [0,t] é, obviamente dado por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{X_n = j, T_n \leq t\}} \qquad (13)$$

(I_B é a função indicatriz do acontecimento B) e portanto,

$$R_{i,j}(t) = E[N_{i,j}(t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[I_{\{X_n = j, T_n \leq t\}} | X_0 = i]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_n = j, T_n \leq t \mid X_0 = i]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Q^n_{i,j}(t) \; ; \; i, j \in E \text{ e } t < \infty . \qquad (14)$$

Convenciona-se que o número de ocorrências num intervalo finito é finito, pelo que $R_{i,j}(t)$ é finito para qualquer i, $j \in E$ e $t < \infty$. Isto é, a matriz M.R., R(t), tem todos os elementos finitos e é dada por:

$$R(t) = [R_{i,j}(t)] =$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} Q^n_{i,j}(t) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(t). \qquad (15)$$

Def. 4 — Seja $F_{i,j}(t)$ a função distribuição do «tempo de primeira passagem» do estado i ao estado j ou seja

$$F_{i,j}(t) = P[T^j_0 \leq t \mid X_0 = i] \; , \; i \neq j . \qquad (16)$$

Def. 5 — Seja $F_{j,j}(t)$ a função distribuição do «tempo de recorrência» do estado j. Ou seja,

$$F_{j,j}(t) = P[T^j_1 \leq t \mid X_0 = j] \qquad (17)$$

(notar que $P[T^j_0 = 0 \mid X_0 = j] = 1$).

É fácil ver através da teoria do renovamento que:

$$R_{j,j}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n_{j,j}(t) \qquad (18)$$

e que,

$$R_{i,j}(t) = \int_0^t d_u P[T^j_0 \leq u \mid X_0 = i] R_{j,j}(t-u), i \neq j$$

$$= \int_0^t dF_{i,j}(u) R_{j,j}(t-u)$$

$$= F_{i,j} * R_{j,j}(u) \qquad (19)$$

onde $F^n_{j,j}(t)$ representa, obviamente, a n.ésima convolução da função distribuição $F_{j,j}(.)$ consigo própria.

Assim, pelo menos teoricamente, uma vez identificada a matriz Semi-Markoviana Q(t) do processo deve ser possível através das fórmulas (11), (12) e (14) obter a matriz Markoviana de renovamento, R(t), e a partir desta obter as funções de distribuição dos «tempos de recorrência» de cada estado e dos «tempos de primeiras passagens» de um estado para outro.

As fórmulas (14), (18) e (19) sugerem as transformadas de Laplace-Stieltjes como o método a seguir. As transformadas de Laplace-Stieltjes serão aqui representadas por letra pequena, por exemplo, $f_{i,j}(s) =$

$$= L - S[F_{i,j}(t); s] = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{i,j}(t), \; s \geq 0.$$

Note-se que a transformada de Laplace-Stieltjes da matriz $Q^n(t)$ converte-se em $q^n(s)$, isto é, a n.ésima potência da matriz q(s). A matriz q(s) é a matriz formada pelas transformadas de Laplace-Stieltjes das componentes da matriz Semi-Markoviana Q(t); o mesmo acontecendo com $f^n_{jj}(s)$.

Usando transformadas de Laplace-Stieltjes em (18) e (19) temos que,

$$r_{j,j}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n_{j,j}(s) = \frac{1}{1 - f_{j,j}(s)}; \; s \geq 0 \qquad (20)$$

e

$$r_{i,j}(s) = f_{ij}(s)\; r_{jj}(s)\,; s \geq 0;\; i \neq j \qquad (21)$$

Ou,

$$f_{j,j}(s) = 1 - \frac{1}{r_{j,j}(s)}, \qquad (22)$$

e

$$f_{i,j}(s) = \frac{r_{i,j}(s)}{r_{j,j}(s)},\; i \neq j. \qquad (23)$$

Estes resultados são válidos quer E seja finito ou não.

No caso da fórmula (15) a questão complica-se se E for infinito (numerável) pois neste caso estamos a trabalhar com matrizes (de funções) que são duplamente infinitas. Aplicando transformadas de Laplace--Stieltjes à fórmula (15) temos que,

$$r(s) = I + q(s) + q^2(s) + \ldots\,; s \geq 0 \qquad (24)$$

o que implica,

$$r(s) = I + q(s)\; r(s)\,, r(s) = I + r(s)\, q(s), \qquad (25)$$

ou seja,

$$[I - q(s)]\; r(s) = I\,, r(s)\; [I - q(s)] = I. \qquad (26)$$

Pela teoria de matrizes, se E finito então, r(s) será sempre dada por:

$$r(s) = [I - q(s)]^{-1} \qquad (27)$$

isto é, r(s) é a matriz inversa da matriz $[I - q(s)]$. Se E é infinito numerável, então $[I - q(s)]^{-1}$ pode não existir. No entanto, pode obter-se r(s) através da resolução da equação matricial, $r(s)\; [I - q(s)] = I$, a qual é equivalente a um sistema infinito de equações lineares. (Para um tratamento mais completo desta questão ver Çinlar (1969, a).

A.4 — SINOPSE DOS RESULTADOS MAIS IMPORTANTES

No caso de E infinito numerável tal como no caso de E finito uma vez identificada a matriz Q(t) e calculadas a partir dela, as componentes ν_n do vector próprio à esquerda correspondente ao valor próprio um da matriz $Q(+\infty)$, $\nu Q(+\infty) = \nu$, e a matriz M.R., $R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(t)$, podem obter-se todas as quantidades importantes associadas ao processo M.R., $\{X_n, T_n; n = 0,1,2,\ldots\}$, e ao processo Semi-Markoviano, $\{Y_t; t \geq 0\}$, nomeadamente:

a) tempo médio de recorrência do estado k, π_k ($\pi_k^{-1} = \nu_k / (\sum_{j=0}^{\infty} m_j \nu_j)$, em que m_j representa o tempo médio de permanência no estado j e é dado por $\int_0^{\infty} [1 - C_j(t)]\,dt$ e em que, $C_j(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q_{j,\ell}(t)$, ver Çinlar (1969, a) e 1975));

b) distribuição limite da C. M. correspondente, $\lim_{n\to\infty} P[X_n = k] = \pi_k^{-1} m_k$, ver Çinlar (1969, a) e 1975);

c) média do n.º de entradas no estado k entre duas entradas consecutivas no estado j, que é dada por ν_k dividido por ν_j, ver Çinlar (1969, a);

d) distribuição condicionada, $P\,[Y_t = k \mid X_0 = j] = \int_0^t [1 - C_k(t-y)]\,dR_{j,k}(y)$, ver Çinlar (1969, a), (7.9)), se $m_k < \infty$ pode também demonstrar-se que $\lim_{t\to\infty} P[Y_t = k \mid X_0 = j] = (\nu_k m_k)/(\sum_{i=0}^{\infty} \nu_i m_i)$, ver Çinlar (1969 a) e 1975);

e) transformadas de Laplace-Stieltjes das funções de distribuição dos «tempos de recorrência de cada estado», fórmula (22);

f) transformadas de Laplace-Stieltjes das funções de distribuição dos «tempos de primeiras passagens de um estado a outro», fórmula (23).

Existem também outras quantidades de grande interesse prático, nomeadamente, «tempo total de permanência num dado conjunto de estados durante um determinado intervalo de tempo finito», que podem ser estudadas através de um outro processo M. R. associado ao primeiro e cuja matriz Semi--Markoviana, $\overline{Q}(t)$, está relacionada com a matriz Semi-Markoviana, Q (t), do processo M. R. inicial do seguinte modo:

$$d\overline{Q}(t) = e^{\theta t}\, dQ(t), \qquad (28)$$

onde a matriz $e^{-\theta t}$ é dada por,

$$e^{-\theta t} = \begin{bmatrix} e^{-\theta_0 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{-\theta_1 t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{-\theta_2 t} & \dots \\ . & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

Dada a maneira simples como $\overline{Q}(t)$ e $Q(t)$ estão relacionadas é fácil ver que uma vez calculada $R(t)$ em termos de $Q(t)$ não é difícil determinar $\overline{R}(t)$ (usando, geralmente, técnicas semelhantes às usadas no cálculo de $R(t)$).

EQUAÇÕES MARKOVIANAS DE RENOVAMENTO

Sejam $f_i(t)$ e $g_i(t)$ funções não negativas, limitadas sobre intervalos finitos tais que:

$$f_i(t) = g_i(t) + \sum_{k \in E} \int_0^t d_u Q_{ik}(u) f_k(t-u), \; i \in E \qquad (29)$$

Obviamente, este sistema de equações integrais pode tomar a forma matricial seguinte:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + (Q^* \mathbf{f})(t), \qquad (30)$$

onde $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são vectores coluna cujos elementos são as funções $f_i(t)$ e $g_i(t)$ para $i \in E$. A equação matricial (30) dá-se o nome de equação Markoviana de renovamento (M. R.) e desempenha um papel fulcral na teoria dos processos M. R. e sua aplicação ao estudo dos processos semi-regenerativos. Muitas das quantidades de interesse dos processos semi-regenerativos podem ser escritas sob a forma de uma equação M.R., como veremos no exemplo apresentado na Parte B deste artigo.

Quando E é constituído por um único elemento esta equação converte-se na «equação de renovamento» dos processos de renovamento. Na maior parte das aplicações os processos M. R. que lhe correspondem são tais que uma vez conhecidas a matriz semi-Markoviana, $Q(t)$, e o vector $\mathbf{g}(t)$ a equação M. R. (30) tem uma solução única, $\mathbf{f}(t)$, que é dada por:

$$\mathbf{f}(t) = (R^* \mathbf{g})(t) \qquad (31)$$

onde $R(t)$ representa a matriz M. R. correspondente à matriz $Q(t)$ conhecida. ou seja, sob a forma de componentes:

$$f_i(t) = \sum_{k \in E} {}_0\int^t d_u R_{ik}(u) g_k(t-u), \; i \in E. \qquad (32)$$

Embora no caso do processo de renovamento a solução da equação de renovamento seja única (a função de renovamento) no caso do processo M. R. não o é necessariamente. Consultar Çinlar (1969, a) para um estudo detalhado da equação M. R., unicidade de solução, comportamento assintótico e aplicação ao estudo do processo semi-regenerativo.

A.5 — ESPAÇO DE ESTADOS INFINITO NUMERÁVEL

Quando E deixa de ser um conjunto finito e passa a ser infinito numerável a matriz Semi-Markoviana, $Q(t)$, passa portanto a ser uma matriz duplamente infinita.

Neste caso mesmo o cálculo de ν ($\nu Q(+\infty) = \nu$, o que exige a resolução de um sistema infinito de equações lineares), quando $Q(+\infty)$ tem todos os seus elementos especificados e quando a matriz é irredutível e recorrente positiva, pode não ser analiticamente fácil ou mesmo determinável (dependendo tal facto da estrutura particular de $Q(+\infty)$, e ser necessário recorrer a métodos de aproximação por truncatura.

Para compreensão das dificuldades teóricas na obtenção de ν e para apresentação de métodos de obtenção de ν fundamentados em técnicas de aproximação finita baseadas em truncaturas finitas sucessivas de $Q(+\infty)$ e de fácil implementação em computador, ver Seneta (1981, cap. 7).

A questão complica-se ainda mais quando se pretende obter a matriz M.R., $R(t)$, a partir da matriz Semi-Markoviana, $Q(t)$ $\left(R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(t)\right.$, em que $Q^n(t)$; $n = 0, 1, 2, \dots$, são definidas pelas fórmulas (11) e $\left.(12)\right)$.

O método baseado nas transformadas de Laplace-Stieltjes, que é sem dúvida o indicado no caso de E finito, no caso de E infinito numerável poderá apresentar grandes dificuldades ou não ser aplicável na maior parte das situações, mesmo quando estas são simples como, por exemplo, quando a estrutura da matriz $Q(t)$ é do tipo tridiagonal. Nesse caso as soluções aproximadas por truncatura que se queiram vir a obter devem evidentemente, ser feitas no campo real, isto é, utilizando a fórmula (14).

A.5.1 — Matriz Semi-Markoviana do Tipo Tridiagonal

Nas aplicações de processos M.R. ao estudo directo ou por «embedding» de contadores estocásti-

cos, filas de espera, controle de qualidade, teoria de tráfego, processos estocásticos pontuais aplicados a «Neuronal Spike Trains», etc., é frequente o aparecimento de um processo M.R. com um espaço de estados infinito numerável cuja matriz Semi-Markoviana é do tipo imigração e morte, isto é,

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \sigma_1(t) & 0 & \rho_1(t) & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2(t) & 0 & \rho_2(t) & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_3(t) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (33)$$

para $t \geq 0$. Onde $\sigma_i(t)$ e $\rho_i(t)$ são quaisquer funções, conhecidas, de t de i e dos parâmetros do sistema, que satisfazem as seguintes condições: $0 \leq \rho_j(t) \leq 1$ para $j = 1, 2, \ldots$; $0 \leq \rho_i(t) \leq 1$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$; $\sigma_i(t) + \rho_i(t) \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots$; e que tornam o processo M.R. regular.

A transformada de Laplace-Stieltjes de Q(t) é portanto, para $s \geqslant 0$ dada por:

$$q_{j,j+1}(s) = L - S\{\rho_j(t); s\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, d\rho_j(t) = \rho_j(s);\ j = 0, 1, \ldots$$

$$q_{j,j-1}(s) = L - S\{\sigma_j(t); s\} =$$

$$= \ldots = \sigma_j(s);\ j = 1, 2, \ldots$$

$$q_{j,k}(s) = 0\ ;\ |k-j| > 1 \text{ ou } j=k;\ j, k \in \{0, 1, \ldots\} \quad (34)$$

Na determinação de $r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q^n(s)$ vamos usar a seguinte equação chave, que se deduz facilmente da definição de r(s):

$$r(s)\,[I - q(s)] = I. \quad (35)$$

Desde que o processo M. R. seja regular esta equação matricial terá uma solução única, r(s). Ver Çinlar (1969, a).

Notar que para i fixo a equação matricial (35) juntamente com (34) permite-nos estabelecer a seguinte condição relativamente aos $r_{i,k}(s)$; $k=0, 1, \ldots$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [1-\sigma_k(s) - \rho_k(s)]\, r_{i,k}(s) = 1;\ i=0, 1, \ldots;\ s \geq 0 \quad (36)$$

(Convenciona-se que $\sigma_0 \equiv 0$).

A equação matricial (35), válida para qualquer processo M. R., aplicada à matriz q(s) definida em (34) conduz-nos ao seguinte sistema infinito de equações lineares:

$$\begin{cases} r_{0,0}(s) - \sigma_1(s)\, r_{0,1}(s) = 1 \\ -\rho_0(s)\, r_{0,0}(s) + r_{0,1}(s) - \sigma_2(s)\, r_{0,2}(s) = 0 \\ \vdots \\ -\rho_{j-1}(s)\, r_{0,j-1}(s) + r_{0,j}(s) - \sigma_{j+1}(s)\, r_{0,j+1}(s) = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (37)$$

Ou seja, em geral, para i fixo ($i = 0, 1, \ldots$) temos o sistema infinito de equações lineares em $r_{i,j}(s)$:

$$-\rho_{j-1}(s)\, r_{i,j-1}(s) + r_{i,j}(s) - \sigma_{j+1}(s)\, r_{i,j+1}(s) = \delta_{i,j}; \quad (38)$$
$$j=0, 1, \ldots;\ s \geqslant 0$$

(Convenciona-se que $\rho_{-1}(s) = 0$).

O problema de calcular os elementos da matriz r(s) neste tipo de processos M. R. converte-se no problema de resolver o sistema (38) sujeito à condição (36). A possibilidade de obter soluções exactas explícitas, $r_{i,j}(s)$, para este sistema em termos de s, e dos outros parâmetros das funções $\sigma_j(s)$ e $\rho_j(s)$ depende inteiramente da forma particular das funções $\sigma_j(s)$ e $\rho_j(s)$ em termos de j, como é sabido da teoria das equações às diferenças de 2.ª ordem. Por exemplo, se $\rho_j(s) = \lambda / (j\mu + \lambda + s)$ e $\sigma_j(s) = j\mu / (j\mu + \lambda + s)$ (o que corresponde ao processo M.R. que governa toda a fila de espera do tipo $M|M|\infty$) através da transformação de variáveis, $t_{i,j}(s) = r_{i,j}(s)/(j\mu+\lambda+s)$ para i fixo e $j=0, 1, \ldots$ e do uso de funções geradoras é possível resolver o sistema infinito de equações lineares (38) convertendo a sua solução na solução de uma equação diferencial de 1.ª ordem de coeficientes não constantes, cuja solução é dada em termos de séries confluentes hipergeométricas, como veremos em seguida.

A FILA DE ESPERA $M|M|\infty$

Seja a matriz Semi-Markoviana, Q(t), dada por:

$$\begin{cases} Q_{j,j+1}(t)= \dfrac{\lambda}{j\mu+\lambda}\,[1-e^{-(j\mu+\lambda)t}]\ ;\ j=1,2,\ldots \\ Q_{j,j-1}(t)= \dfrac{j\lambda}{j\mu+\lambda}\,[1-e^{-(j\mu+\lambda)t}]\ ;\ j=1,2,\ldots \\ Q_{j,k}(t)=0 \qquad ;\ |j-k|>1 \text{ ou } j=k;\ j,k=1,2,\ldots \\ Q_{0,1}(t)=1-e^{-\lambda t} \end{cases} \tag{39}$$

onde λ e μ são números reais positivos conhecidos. Ou seja $\rho_j(s)=\lambda/(j\mu+\lambda+s)$, $j=0,1,\ldots$ e $\sigma_j(s)=(j\mu)/(j\mu+\lambda+s)$ e $j=1,2,\ldots;\ \geqslant 0$. Neste caso (38) terá a forma seguinte:

$$-\frac{\lambda}{(k-1)\mu+\lambda+s}\,r_{i,k-1}(s)+r_{i,k}(s)-$$

$$-\frac{(k+1)\mu}{(k+1)\mu+\lambda+s}\,r_{i,k+1}(s)=$$

$$=\delta_{i,k};\ k=0,1,\ldots;\ r_{i,-1}(s)=0;\ s\geqslant 0 \tag{40}$$

Fazendo $t_{i,k}(s)=(1/(k\mu+\lambda+s))\,r_{i,k}(s)$ e substituindo em (40) temos, para i fixo $(i=0,1,\ldots)$,

$$-\lambda t_{i,k-1}(s)+(k\mu+\lambda+s)t_{i,k}(s)-$$

$$-(k+1)\mu t_{i,k+1}(s)=\delta_{i,k};\ k=0,1,\ldots \tag{41}$$

Os coeficientes de (41) são funções lineares de k para $k=0,1,\ldots$

Definamos em seguida as funções geradoras $y_i(x)$ para i fixo $(i=0,1,\ldots)$,

$$y_i(x)=G_i(x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_{i,k}(s)}{k\mu+\lambda+s}\,x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} t_{i,k}(s)\,x^k\,. \tag{42}$$

convergentes para $|x|<1$.

Note-se que, a condição (36) toma agora o seguinte aspecto:

$$y_i(1)=G_i(1;s)=1/s\,. \tag{43}$$

Multiplicando em (41) cada uma das «equações k» por x^{k+1} $(k=0,1,\ldots)$ somando-as conjuntamente e usando as funções geradoras definidas em (42) convertemos a resolução do sistema (41) na resolução da equação diferencial de 1.ª ordem:

$$\mu(1-x)\,y_i'-[\lambda(1-x)+s]\,y_i(x)+$$

$$+x^i=0;\ 1=0,1,\ldots \tag{44}$$

onde $y_i'(x)=d/dx\ y_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\ t_{i,k}(s)\ x^{k-1}$. A fórmula (43) fornece a condição inicial necessária para determinar completamente a solução desta equação diferencial.

Estas equações diferenciais de 1.ª ordem convertem-se em equações diferenciais exactas através do factor integrante, «$e^{-(\lambda/\mu)x}(1-x)^{(s/\mu)-1}$», isto é,

$$\mu(1-x)^{s/\mu}e^{-(\lambda/\mu)x}\,y_i'(x)+\{[-(\lambda+s)+$$

$$+\lambda x]\,y_i(x)+x^i\}\,e^{-(\lambda/\mu)x}(1-x)^{(s/\mu)-1} \tag{45}$$

é uma equação diferencial exacta, com a condição inicial $y_i(1)=1/s$. Para $x>0$ e $s\geq 0$,

$$y_i(x)=\frac{e^{-(\lambda/\mu)(1-x)}}{\mu}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\frac{(1-x)^k}{(s/\mu)+k}\cdot \tag{46}$$

$$\phi\,((s/\mu)+k,\ (s/\mu)+k+1;\ (\lambda/\mu)\ (1-x));\ i=0,1,\ldots$$

onde $\phi(.,.;.)$ é uma série confluente hipergeométrica, ver Erdelyi et al (1953).

Pela fórmula (42) temos que:

$$\frac{n!}{n\mu+\lambda+s}\,r_{i,n}(s)=\left.\frac{d^n y_i(x)}{dx^n}\right|_{x=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{(s+k\mu)}\cdot\frac{d^n}{dw^n}\left[w^k\,\phi\,(1,\ \frac{s}{\mu}+k+1;\ w)\right]\Bigg|_{w=-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\times\left(\frac{dw}{dx}\right)^n\Bigg|_{x=0}\ ,\quad 1=0,1,\ldots;\ n=1,2,\ldots \tag{47}$$

onde $w=-\frac{\lambda}{\mu}(1-x)$. Usando a fórmula que nos dá a derivada de ordem n de um produto de funções $([d^n[a(x).b(x)]]/dx^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}[d^j a(x)]/dx^j\ [d^{n-j}b(x)]/dx^{n-j})$, obtém-se

$$r_{i,n}(s)=\frac{n\mu+\lambda+s}{n!}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(\frac{\mu}{\lambda})^k}{s+k\mu}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{d^j(w^j)}{dw^j}\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{n-j}\,\phi\,(1,\frac{s}{\mu}+k+1\,;\,w)}{dw^{n-j}}\right]\Bigg|_{w=-\frac{\lambda}{\mu}}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot \tag{48}$$

Notando que,

$$\frac{d^j(w^k)}{dw^j} = \begin{cases} k(k-1)\ldots[k-(j-1)]\,w^{k-j}, \text{if } k=j, j+1, \ldots \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (49) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{, caso contrário;} \end{cases}$$

e usando ainda o resultado em Erdélyi [53; p. 254, (10)], para derivadas de séries confluentes hipergeométricas, temos finalmente,

$$r_{i,n}(s) = (n\mu+\lambda+s) \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} \frac{1}{s+k\mu} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (-1)^j \binom{k}{j}$$

$$\times \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-j}\right] \Big/ \left[\left(\frac{s}{\mu}+k+1\right)_{n-j}\right] \phi$$

$$\phi\left(n-j+1, \frac{s}{\mu}+k+n-j+1; -\frac{\lambda}{\mu}\right);$$

$$i, n \in \{0, 1, \ldots\};\ s \geq 0. \qquad (50)$$

A.6 — CONCLUSÕES

1. Sob o ponto de vista probabilístico e das aplicações correntes é razoável convencionar, que na matriz M.R., Q(t), definida pela fórmula (33) se tenha $\rho_0(+\infty) = \rho_0 = 1$ e $\rho_i(+\infty)+\sigma_i(+\infty) = \rho_i+\sigma_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots$.

Esta convenção adicional, juntamente com a estrutura particularmente simples da matriz Q(t) faz com que as coordenadas ν_k; $k = 0, 1, \ldots$ do vector próprio à esquerda correspondente ao valor próprio um da matriz $Q(+\infty)$, (solução do sistema $\sum_{i=0}^{\infty} \nu_i Q_{i,j}(+\infty) = \nu_j$; $j = 0, 1, \ldots$) sejam sempre determinadas e dadas por:

$$\begin{cases} \nu_0 = 1 \\ \nu_k = \dfrac{\rho_1 \ldots \rho_{k-1}}{(1-\rho_1)\ldots(1-\rho_k)};\ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (51)$$

2. No caso do cálculo da matriz M.R., R(t), a situação já não é tão agradável, pois embora se saiba que ela existe, só nos foi possível resolver analiticamente a equação matricial (35) no caso em que Q(t) é definida por (39). A fórmula (50) dá a solução encontrada que aliás está longe de ser simples.

3. Podemos portanto concluir que para processos M.R., de espaço de estados infinito numerável, é sempre possível calcular exacta ou aproximadamente as quantidades associadas ao processo, relativas ao comportamento do estado estacionário do processo, isto é, que sejam do tipo do tempo médio de recorrência de qualquer estado, π_k; da distribuição limite da C.M. correspondente; da média do n.º de entradas num dado estado entre duas entradas consecutivas num outro estado, e do $\lim_{t\to\infty} P[Y_t = k \mid X_0 = i]$. Visto que, estas quantidades são definidas essencialmente à custa das componentes ν_k do vector próprio à esquerda correspondente ao valor próprio um de $Q(+\infty)$, e são independentes dos elementos $R_{i,j}(t)$ da matriz R(t). O que aliás, não é o caso relativamente às distribuições condicionadas, $P[Y_t = k \mid X_0 = j]$; transformadas de Laplace-Stieltjes das funções da distribuição dos «tempos de recorrência de cada estado» e dos «tempos das primeiras passagens de um estado a outro», que como vimos, fórmulas (22) e (23), dependem dos elementos $r_{i,j}(s)$.

4. Em conclusão há ainda muito a fazer na área da aplicação da teoria às situações práticas, uma vez que o cálculo da maior parte das características importantes destes processos, (exceptuando as características relativas ao comportamento estacionário) se baseiam na matriz M.R., R(t), a qual é muito difícil de calcular analiticamente, a não ser no caso de uma estrutura particularmente simples da matriz semi-Markoviana, Q(t). Os caminhos propostos para ultrapassar estas dificuldades consistem na procura de algoritmos computacionais e no desenvolvimento de teorias de aproximação para o cálculo de algumas destas características. Evidentemente, que estas duas alternativas estão fortemente dependentes das aplicações em vista. É aqui, na ligação da teoria à prática que se encontram as áreas priveligiadas de investigação actual em processos M.R., visto que como já se referiu atrás a teoria dos processos M.R., sob um ponto de vista formal está praticamente concluída.

PARTE B — UTILIZAÇÃO DA TEORIA DE PROCESSOS MARKOVIANOS DE RENOVAMENTO NA MODELAÇÃO DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

Os processos M.R. têm sido aplicados com sucesso na modelação de muitas situações práticas, nomeadamente:

— Filas de espera, Cheong, de Smit e Teugels (1974), Disney (1975) apresentam uma vasta bibliografia sobre este assunto se bem que não totalmente actualizada, visto que, nestes últimos dez anos muito se tem publicado sobre esta matéria; por exemplo, Ramalhoto e Girmes (1977), Ramalhoto (1981) estudam, numa perspectiva unificadora, filas de espera de capacidade infinita de serviço, através de processos M.R. de uma forma exacta e, também, por aproxi-

mações consoante a natureza probalística do «input» e do serviço da fila; Cole (1979) apresenta um método interessante de amostragem, numa aplicação de um processo M.R. multidimensional ao estudo de filas de espera em aeroportos; Powers e Lackey (1975), Purdue (1975), estudam tipos específicos de filas de espera, surgidas no estudo de sistemas biológicos, em termos de processos M.R.

— Transportes, por exemplo, Daganzo (1975) estuda problemas de tráfego rodoviário através de processos M.R. com três estados e concluí que o seu modelo parece produzir resultados mais realistas do que os modelos existentes até àquela altura.

— Redes de ambulâncias, por exemplo, Hall (1969) apresenta um longo relatório sobre o estudo dos serviços de emergência da polícia de Detroit, U.S.A., onde trata as várias fases do problema, isto é, recolha de dados, elaboração de um primeiro modelo probabilístico grosseiro, estudo estatístico das características mais importantes do sistema (de modo a fazer por exemplo, um ajustamento razoável das distribuições de probabilidade que é necessário postular no modelo probabilístico escolhido, etc.); o sistema global do serviço de emergência foi estudado como sendo uma fila de espera com um processo chegada Markoviano de renovamento. Este modelo de fila de espera é consistente com os dados observados, fornece uma estrutura mais simples que muitos outros modelos probabilísticos previamente explorados para calcular as características de interesse prático do sistema, e fornece ainda uma melhor compreensão dos mecanismos do sistema na sua totalidade. Este relatório, se bem que não muito recente é no entanto um valioso trabalho de inter-acção entre teoria de filas de espera, teoria de processos M.R., modelação estocástica de problemas da vida real e estatística. É interessante notar que foi o estudo teórico e puramente analítico e abstracto sobre este tipo de filas de espera com processos chegada M. R. desenvolvido pela Prof. R. L. Disney, cinco anos antes do início deste projecto, que permitiu modelar a situação prática considerada.

— Situações referentes a gestão de pessoal e sociologia por exemplo, Bartholomeu (1982).

— Estudos de fiabilidade de equipamentos, por exemplo, Di Marco (1972).

— Situações referentes às ciências computacionais, à psicologia e às ciências biológicas, por exemplo, Sim (1976).

— Em «design» de estruturas de cimento armado para reactores nucleares, Çinlar, Bazant e Osman (1977).

A literatura sobre as aplicações à vida real dos processos M. R. é vasta e ainda mais dispersa e menos acessível que a literatura sobre a teoria destes processos. Na verdade muitas destas aplicações confinam-se a relatórios privados e algumas vezes confidenciais de empresas industriais e comerciais, hospitais, instituições de investigação, departamentos de defesa e do Governo em geral, assim como, em teses de mestrado e doutoramento em departamentos de Matemática Aplicada, Estatística, Investigação Operacional, Engenharia Industrial, Civil, Mecânica, Electrotécnica, Química, Psicologia, Sociologia, Ciências Médicas, Biologia, Gestão, «Management Science», etc.

Apresenta-se em seguida um exemplo, de uma situação da vida real, que se espera ilustre razoavelmente a maneira de aplicar a teoria dos processos M.R. a situação concretas. Escolheu-se este exemplo por ser suficientemente pequeno para poder ser resolvido aqui e permitir ilustrar o uso de muitos dos conceitos e dos resultados sobre teoria dos processos M.R. apresentados na Parte A, deste artigo. Sob o ponto de vista prático este exemplo se bem que trivial, foi no entanto usado como parte de um modelo de combate desenvolvido em Miller, White e Thompson (1979) para fornecer ensinamento sobre o uso de armas contra alvos móveis em terrenos agrestes.

Exemplo sobre Visibilidade (Miller, White e Thompson (1979)).

Considera-se que o alvo se movimenta em terreno acidentado. A ideia básica é a de que o alvo pode estar apenas em um de dois estados: invisível ou visível, isto é, espaço de resultados $E=\{0,1\}$. O objectivo é estudar a visibilidade do alvo. Será o alvo visível no instante t? No caso afirmativo, por quanto tempo? Aliás uma das questões práticas fulcrais consiste em estudar as armas existentes ou a desenvolver, com o objectivo de comparar o tempo necessário de pontaria e chegada ao alvo do projéctil, com o tempo de visibilidade do alvo.
Seja,

$$X_n = \begin{cases} 0, \text{ se o alvo } \textit{não é visível} \text{ na n} \dfrac{\text{ésima}}{} \text{ transição} \\ 1, \text{ se o alvo } \textit{é visível} \text{ na n} \dfrac{\text{ésima}}{} \text{ transição} \end{cases}$$

Dadas as características do sistema não é possível distinguir se um alvo visível muda de estado mas continua visível ou sendo invisível muda de estado e continua invisível e por isso assume-se que:

$$P_{ij} = P[X_{n+1}=j|X_n=i] = \begin{cases} 0, \text{ se } i=j \\ 1, \text{ se } i\neq j, \end{cases} \tag{52}$$

ou seja, se num dado instante o alvo está no estado i, no instante seguinte em que muda de estado tem de ir para o estado $j\neq i$. Define-se T_n como sendo o

instante em que o alvo muda de estado pela n $\frac{\text{ésima}}{\cdot}$ vez e considera-se que:

$$P\,[T_{n+1}-T_n \leq t | X_{n+1}=j, X_n=i] = G_{i,j}(t) \qquad (53)$$

Se o terreno tem esconderijos é razoável esperar que em média o alvo permaneça escondido durante longos períodos de tempo. Se pelo contrário o terreno é escampado então esperar-se-á que em média o alvo fique visível por longos períodos de tempo. Uma ou outra situação reflectir-se-á no valor de $G_{01}(t)$.

Toma-se o processo base de modelação deste sistema estocástico como sendo o processo M.R. $\{X_n, T_n;\ n \in N\}$ com $E = \{0,1\}$ e $Q(t) = [Q_{ij}(t)] = [P\,[X_{n+1} = j, T_n - T_n \leq t | X_n = i] = [P\,[X_{n+1} = j | X_n = i] \cdot P\,[T_{n+1} - T_n \leq t | X_{n+1} = j,\ X_n = i]] = [(1 - I_{i,j})\, G_{ij}(t)]$ onde I_{ij} é o (i,j) $\frac{\text{ésimo}}{\cdot}$ elemento da matriz identidade e convenciona-se que $T_0 = 0$ e $P\,[X_0 = 0] = 1$. Isto é,

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & G_{01}(t) \\ G_{10}(t) & 0 \end{bmatrix}. \qquad (54)$$

(um processo M.R. com uma matriz semi-Markoviana tão simplificada quanto esta goza de propriedades especiais e chama-se um processo de renovamento alternado; note-se que sabendo em que estado se está, o estado seguinte fica completamente determinado).

Por hipótese, o processo é considerado homogéneo, isto é:

$$Q_{ij}^{(2)}(t) = P\,[X_2 = j \cdot T_2 \leq t \,|\, X_0 = i]$$

$$= P\,[X_{n+2} = j\,, T_{n+2} - T_n \leq t \,|\, X_n = i]\,. \qquad (55)$$

Ou seja, pelas fórmulas (54) e (55)

$$Q_{00}^{(2)}(t) = \sum_{j \in E} \int_0^t d_u\, Q_{oj}(u)\, Q_{j0}(t-u)$$

$$= \int_0^t d_u\, Q_{01}(u)\, Q_{10}(t-u) =$$

$$= (G_{01} * G_{10})(t)\,,$$

e claramente,

$$Q_{01}^{(2)}(t) = 0$$

Portanto se o processo começa no estado "0", as subsequentes entradas no estado" 0" (invisibilidade) formam uma sequência de v.a. $\{S_n;\ n \in N\}$ e $\{S_{n+1} - S_n;\ n \in N\}$ é uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas com

$$P\,[S_{n+1} - S_n \leq t] = (G_{01} * G_{10})(t) \cdot \qquad (56)$$

Ou seja, as sucessivas entradas no estado "0" se o processo começa no estado "0" é um processo de renovamento com função distribuição dada por (56).

Para prosseguir o estudo da visibilidade do alvo é necessário introduzir outras famílias de variáveis aleatórias (processos estocásticos semi-regenerativos) ligadas ao processo M.R. inicial.

Sejam,

$$Y_t = X_n \cdot \text{ se } T_n \leq t < T_{n+1} \cdot \text{ com } t \in R_+ \cdot \qquad (57)$$

em que Y_t diz-nos simplesmente se o alvo está ou não visível no instante t, e

$$Z_t = T_{n+1} - t \cdot T_n \leq t < T_{n+1} \cdot \text{ com } t \in R_+ \qquad (58)$$

em que Z_t diz-nos por quanto tempo o alvo permanecerá no estado que ocupa no instante t.

Seja,

$$P\,[Y_t = j,\ Z_t > y \,|\, X_0 = i] = H_i(j, y, t)\,. \qquad (59)$$

Notar que $H_i(j, y, t)$ contém toda a informação de visibilidade do alvo. Por exemplo, para $j=1$ e $i=0$ ela representa a probabilidade que o alvo seja visível no instante t e que permaneça visível por mais do que y unidades de tempo dado que inicialmente o alvo estava invisível. Vamos ver como obter esta probabilidade em termos dos elementos da matriz semi-Markoviana, Q(t), definida por (54) e da sua correspondente matriz Markoviana de renovamento, R(t). Para tal, e porque estamos interessados na probabilidade de ocorrência de acontecimentos num instante futuro $t>0$, vamos recorrer a uma partição baseada no instante de ocorrência da 1.ª transição depois do instante zero, T_1, de modo a essa probabilidade poder ser obtida em termos de dois acontecimentos mutuamente exclusivos: $t<T_1$ e $t \geq T_1$. Com efeito, dado que $X_0=0$, quando $T_1>t$ teremos,

$$Y_t = j, \text{ com probabilidade 1, se } j=0 \text{ e}$$

$$\text{com probabilidade 0, se } j \neq 0\,.$$

Além disto, $T_1>t$ e $Z_t>y$, se e só se, não tiver havido nenhuma mudança de estado antes de t (e portanto no instante t, $Y_t=0$), e não vier a haver nenhuma mudança de estado durante as seguintes y unidades de tempo depois de t. Em geral,

$$P\,[Z_t>y,\ T_1>t \mid X_0=i] = P\,[T_1>t+y \mid X_0=i] = $$
$$= 1 - \sum_{k\in E} Q_{ik}(t+y)$$

e portanto,

$$P\,[Y_t=j,\ Z_t>y,\ T_1>t \mid X_0=i] =$$
$$= I_{ij}\,[1 - \sum_{k\in E} Q_{ik}(t+y)].$$

Recorrendo agora à partição em T_1 temos:

$$H_i(j,y,t) = P\,[Y_t=j,\ Z_t>y,\ T_1>t \mid X_0=i] +$$
$$+ P\,[Y_t=j,\ Z_t>y,\ T_1\leq t \mid X_0=i]$$
$$= I_{ij}\,[1 - \sum_{k\in E} Q_{ik}(t+y)] +$$
$$+ \sum_{k\in E} \int_0^t d_u\, P\,(X_1=k,\ T_1\leq u \mid X_0=i)$$
$$P\,[Y_{t-u} = j,\ Z_{t-u}>y \mid X_0=k]$$
$$= I_{ij}\,[1 - \sum_{k\in E} Q_{ik}(t+y)]$$
$$+ \sum_{k\in E} \int_0^t d_u\, Q_{ik}(u)\, H_k(j,y,t-u),$$
$$\text{para } i\in E. \tag{60}$$

A equação (60) é uma «equação Markoviana de renovamento», e portanto,

$$H_i(j,y,t) = \int_0^t d_u\, R_{ij}(u)\,[1 -$$
$$- \sum_{k\in E} Q_{jk}(t+y-u)] \tag{61}$$

onde $R_{ij}(t)$ é o (i, j) ésimo termo da matriz Markoviana de renovamento do processo M.R. subjacente e definido através da matriz semi-Markoviana dada por (54). Como vimos na Parte A deste artigo em geral esta matriz R(t) não é fácil de calcular. Porém neste nosso exemplo, dada a forma extremamente simples da matriz Q(t), não vai ser difícil calcular R(t).

Com efeito, a transformada de Laplace-Stieltjes de Q(t), q(s), é dada por, $q(s) = \begin{bmatrix} 0 & g_{01}(s) \\ g_{10}(s) & 0 \end{bmatrix}$ em que g_{ij} é a transformada de Laplace-Stieltjes de $G_{ij}(t)$. Como sabemos $E=\{0,1\}$ e portanto finito e pela teoria dos processos M.R.,

$$r(s) = [I-q(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-g_{01}(s)\,g_{10}(s)} & \dfrac{g_{01}(s)}{1-g_{01}(s)\,g_{10}(s)} \\ \dfrac{g_{10}(s)}{1-g_{01}(s)\,g_{10}(s)} & \dfrac{1}{1-g_{01}(s)\,g_{10}(s)} \end{bmatrix} \tag{62}$$

(Notar que se as funções distribuição $G_{ij}(t)$ não tiverem transformadas de Laplace-Stieltjes, não se poderá obter r(s)).

Se r(s) existir, pelo menos formalmente, podemos inverter esta transformada e obter R(t). E como sabemos, pela Parte A deste artigo uma vez calculada R(t) está-se apto a resolver quaisquer tipos de questões relacionadas com o processo M.R. em causa.

Consideraremos agora que $G_{01}(t)=G_{10}(t)=1-e^{-\mu t}$, (esta hipótese é pouco realista, mas é aqui considerada para simplificar os cálculos. Num problema prático era preciso fazer uma análise estatística cuidada, de modo a permitir escolher para distribuições $G_{01}(t)$ e $G_{10}(t)$ aquelas distribuições que «melhor se ajustassem» aos dados observados, através do uso da teoria de testes de hipóteses e estimação), então

$$g_{01}(s)=g_{10}(s)= \frac{\mu}{\mu+s} \text{ e } r(s) =$$
$$\frac{1}{1-\mu^2/(\mu+s)^2} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{\mu+s} \\ \dfrac{\mu}{\mu+s} & 1 \end{bmatrix}$$

o que não é difícil de inverter.

$$\begin{cases} R_{00}(t)=R_{11}(t) = \begin{cases} 1\ , & t=0 \\ 1+\dfrac{\mu t}{2}-\dfrac{1}{4}(1-e^{-2\mu t}), & t\geq 0 \end{cases} \\ R_{01}(t) = R_{10}(t) = \dfrac{\mu t}{2} + \dfrac{1}{4}(1-e^{-2\mu t}),\ t\geq 0. \end{cases} \tag{63}$$

(Notar que $R_{ii}(t)$ terá sempre um salto na origem de tamanho 1, visto que se definiu esta função no intervalo fechado [0, t] e se considerou a ocorrência de um salto no instante t=0 ($T_0=0$). Portanto o número esperado de visitas ao estado i é sempre pelo menos um se $X_0=i$).

Através das fórmulas (61) e (63) e depois de algumas manipulações algébricas simples, temos:

$$H_0(0,y,t) = \frac{1}{2}e^{-\mu y} + \frac{1}{2}e^{-2\mu t-\mu y}, \tag{64}$$

$$H_0(1,y,t) = \frac{1}{2}e^{-\mu y} - \frac{1}{2}e^{-2\mu t-\mu y}, \tag{65}$$

Ou seja, a probabilidade de que o alvo que está inicialmente invisível, fique invisível no instante t e permaneça invisível durante pelo menos mais y unidades de tempo é dada por (64). A fórmula (65) dá portanto a probabilidade de que o alvo que inicialmente está invisível fique visível no instante t e permaneça visível durante pelo menos mais y unidades de tempo.

$$H_0(0,y,t) + H_0(1,y,t) = P[Z_t > y \mid X_0 = 0] = e^{-\mu y} \qquad (66)$$

Esta fórmula representa a probabilidade de que o intervalo de tempo a partir do instante t até à mudança de estado seguinte seja maior do que y unidades de tempo, qualquer que seja esse estado seguinte que venha a ocupar. Visto que os tempos de ocpuação dos estados são variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas, (66) é uma consequência da «falta de memória» das exponenciais.

Se em (59) fizermos $y \to 0$, teremos,

$$H_i(j,0,t) = P[Y_t = j \mid X_0 = i], \qquad (67)$$

ou seja, as probabilidades dos estados (dependentes do tempo) para o processo semi-Markoviano $\{Y_t, t \in R_+\}$.

Se em (64) e (65) fizermos $y \to 0$ e $t \to \infty$, obtemos as probabilidades estacionárias dos estados para $\{Y_t\ t \in R_+\}$, as quais são obviamente $\frac{1}{2}$ porque nós consideramos $G_{01}(t) = G_{10}(t)$.

A probabilidade do alvo permanecer visível durante mais y unidades de tempo dado que neste momento está visível, é dado por: $P[Z_t > y | Y_t = 1] = e^{-\mu y}$, $t \geq 0$. Visto que:

$$H_0(1,y,t) = P[Y_t = 1, Z_t > y | X_0 = 0] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\mu y} - \frac{1}{2} e^{-2\mu t - \mu y}$$

$$H_0(1,0,t) = P[Y_t = 1 | X_0 = 0] = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu t}).$$

Portanto, $P[Z_t > y \mid Y_t = 1, X_0 = 0] = \frac{P[Z_t > y, Y_t = 1 | X_0 = 0]}{P[Y_t = 1 | X_0 = 0]} = e^{-\mu y}$ e como $P[X_0 = 0] = 1$,

segue-se o resultado pretendido. A simplicidade de todas estas fórmulas resulta de se ter escolhido $G_{01}(t) = G_{10}(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Neste caso $\{Y_t, t \in R_+\}$ é um processo Markoviano e $\{X_n, T_n; n \in N\}$ é um processo de renovamento alternado e não era necessário usar as ferramentas mais sofisticadas dos processos Markovianos de renovamento, o que aliás fazemos aqui apenas com o intuito de ilustrar a teoria apresentada na Parte A deste artigo.

BIBLIOGRAFIA

BARTHOLOMEU, D. J. (1982). Stochastic Models for Social Processes. 3.ª Edição, Wiley.

CHEONG, C. R.; DE SMIT, J. H. A. e TEUGELS, J. L. (1974). Notes on Semi-Markov Processes, Part II: Bibliography. Discussion paper No. 7297, Core, Université Catholique de Louvain.

ÇINLAR, E. (1969, a). Markov-Renewal Theory. Adv. in Appl. Prob., 1, 123-187.

ÇINLAR, E. (1969, b). On Semi-Markov Processes on Arbitrary Spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc. 56, 381-392.

ÇINLAR, E. (1972). Markov Additive Processes, II, Z. Wahrscheinlich Keitstheorie Verw. Geb. 24, 94-121.

ÇINLAR, E. (1975). Introduction to Stochastic Processes. Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J.

ÇINLAR, E.; BAZANT, Z. e OSMAN, H. (1977). Stochastic Processes for Extrapolating Concrete Creep, J. Engr. Mech. Div. of ASCE, 103, 1069-1088.

COLE, A. E., Jr. (1979). Airport Curbside Operations: A Queueing Model with Blocking. Doctoral dissertation, Dept. of Civil Engineering, University of Michigan, Ann. Arbor, U.S.A.

DAGANZO, C. (1975). Two Lane Road Traffic: A Stochastic Model. Dept. of Civil Engineering, University of Michigan, Ann. Arbor,, U.S.A.

DIMARCO, A. (1972). The Intermediate Term Security Assessment of a Power Generating System. Dept. of Industrial and Operations Engineering, University of Mi chigan, Ann. Arbor, U.S.A.

DISNEY, R. L. (1975). Random Flow in Queuing Networks; A Review and Critique. Transactions (A.I.I.E.), 7 268-288.

DISNEY, R. L. (1981). A Tutorial on Markov Renewal Theory, Semi-Regenerative Processes and their Applications. Dept. of Industrial Engineering, Virginia Polytechnic Institute.

ERDELYI; MAGNUS; OBERHETTINGER e TRICOMI (1953). Higher Transcendental Function. McGraw-Hill Book Compony.

EZHOV, I. I. e SKOROKHOD, A. V. (1969). Markov Processes with Homogeneous Second Componet, II.

FELLER, W. (1966). An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2. Wiley.

FINCH, P. D. (1959). The Output Process of the Queueing System M|G|1. J. Roy Stat. Soc., B. 21, 375-380.

HALL, W. K. (1969). A Queueing Theoretic Approach to the Allocation and Distribution of Ambulances in an Urban Area. School of Busines Administration, University of Michigan, Ann. Arbor, U.S.A.

LÉVY, P. (1954). Processus Semi-Markoviens. Proc. Intern. Congr. Math. (Amsterdam) 3, 416-426.

MILLER, WHITE e THOMPSON (1979). Vector-2 System for Simulation of Theater — Level Combat. Technical Memorandum TMXXX-79, report number VRICCT-2, FR78-1, Vector Research, Incorporated, Ann. Arbor, Michigan, U.S.A.

POWERS, J. E. e LACKEY, R. T. (1975). Interactions in Ecosystems: A Queueing Approach to Modelling. Math. Biosci. 25, 81-90.

PURDUE, P. (1975). Stochastic Theory of Compartments, An Open, Two Compartment, Reversible System with Independent Poisson Arrivals. Bull. Math. Biol., 37, 269-275.

PYKE, R. (1961, a). Markov Renewal Processes: Definitions and Preliminary Properties. Ann. Math. Statist. 32, 1231--1242.

PYKE, R. (1961, b). Markov Renewal Processes with Finitely

many States. Ann. Math. Statist. 32, 1243-1259.

PYKE, R. e SCHAUFELE, R. (1964). Limit Theorems for Markov Renewal Processes. Ann. Math. Statist. 35, 1746--1764.

PYKE, R. e SCHAUFELE, R. (1966). The Existence and Uniqueness of Stationary Measures for Markov Renewal Processes. Ann. Math. Statist. 37, 1439-1462.

RAMALHOTO, M. F. (1981). Breves Considerações sobre Aproximações e Limites em Sistemas do Tipo G|G|∞. 2.° Colóquio de Estatística e Investigação Operacional, Abril, Fundão, Portugal, págs. 393-401.

RAMALHOTO, M. F. (1984). Infinite Markov Renewal Matrices. 3.° Colóquio de Estatística e Investigação Operacional, Outubro, Lagos, Portugal, Actas do Colóquio (a serem publicadas brevemente).

RAMALHOTO, M. F. e GIRMES, D. H. (1977). Markov Renewal Approach to Counter Theory em «Recent Developments in Statistics», Ed. J. R. Barra et al., North--Holland, 581-590.

SENETA, E. (1981). Non-Negative Matrices and Markov Chains, 2.ª Edição, Springer-Verlag.

SIM, D. A. (1976). Semi-Markov Processes and their Applications. Dept. of Mathematics, University of Auckland, New Zeland.

SMITH, W. L. (1955). Regenerative Stochastic Processes. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 232, 6-13.

TAKÁCS, L. (1954). Some Investigations Concerning Recurrent Stochastic Processes of a Certain Type. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutaot. Inst. KOLZ 3, 155-128.

TAKÁCS, L. (1957). On a Generalization of Renewal Theory. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato. Int. KOZL. 6, 91-103.

RECURSOS HUMANOS NACIONAIS E DESENVOLVIMENTO*

LUIS AIRES BARROS
Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico
Director do Instituto de Energia do LNETI

RESUMO

O estudo apresentado consta de três partes. Na primeira, refere-se, sinteticamente, a situação educativa portuguesa e comentam-se as projecções sobre necessidade de recursos humanos no país até 1992, feitas em trabalho realizado pelo Ministério da Educação com a colaboração do Banco Mundial. Na segunda parte, apresenta-se o panorama nacional nos domínios da I,D&D comentando-se os valores disponíveis. Fecha o estudo um capítulo de considerações finais. Aí, salientando-se que o país não dispõe de recursos relevantes de matérias-primas e energéticas, conclui-se que se deverá investir fortemente nos seus recursos humanos, beneficiando da posição geográfica e das relações sócio-económicas tecidas ao longo da História. Consequentemente, o fortalecimento dos recursos humanos nacionais é a prioridade das prioridades.

1 — A SITUAÇÃO NACIONAL E O DESENVOLVIMENTO

Sendo Portugal um país sem grandes recursos de matérias-primas e energéticas, dever-se-á investir fortemente nos seus recursos humanos, beneficiando da posição geográfica do país e de relações sócio-económicas tecidas ao longo da História.

O primeiro investimento nos recursos humanos no nosso país terá, necessariamente, de ser feito na Educação. Todavia este esforço deverá ser norteado pela ideia base de que o sistema educativo tem de ser aberto, global, coerente, contínuo e flexível não permitindo que o Homem adquira posicionamento fixo na sociedade, resultante da educação recebida apenas em dada época da sua vida. Trata-se de instituir a *educação permanente* que consiste em um sistema contínuo de formação que procura responder às exigências da realização pessoal e social de cada pessoa e da sociedade na sua evolução temporo-espacial educacional, dos jovens aos adultos, feita equilibrada e conjuntamente ao longo de toda a vida e por toda a nação.

É preciso não só formar e informar para o primeiro emprego, evitando a inadequação entre o que se aprende e o que a vida real exige, como ainda formar de modo dinâmico de maneira a que, a todo o tempo, a pessoa possa reagir, adaptando-se a novas situações. Por um lado, há que obter boa correlação entre a escola e o mundo do trabalho, por outro, há que ter em conta a evolução tecnológica que pressupõe reciclagens e o ajuste aos novos saberes.

Tenha-se em atenção que a educação é o processo que permite a integração da pessoa na colectividade

---

* Comunicação apresentada ao Congresso da Ordem dos Engenheiros de 1985, em Coimbra.

original recebido para publicação em 11/4/85

à medida que se desenvolve, favorecendo o desabrochar das suas faculdades.

As modificações profundas da sociedade actual não são apenas quantitativas, mas também qualitativas. A cibernética tende a substituir-se a certas formas de actividade intelectual, a telemática permite ao Homem colocar-se à escala da velocidade planetária. A mutação da sociedade vai no sentido do terciário. O primário torna-se residual, o mínimo para garantir a subsistência da nação. A população migra para o secundário e, cada vez mais, deste para os serviços, concentrando-se na indústria da informação — meios de comunicação social, informática, telemática, ensino.

A cultura deixou de ser veiculada principalmente pelo livro para o ser pela imagem, pelos educadores sem rosto como a televisão, o cinema, a publicidade, os discos, o telefone, a banda desenhada, etc. À proliferação dos meios de transmissão da cultura veio juntar-se a enorme massa de informação disponível o que exige o contínuo reciclar dos nossos conhecimentos.

É imperiosa a inter-relação entre a Educação, o Trabalho e a Produção. Tem de se acelerar o desenvolvimento e criar emprego. O desenvolvimento corresponde a um estádio organizativo da sociedade caracterizado pela existência de acesso real de toda a sua população às oportunidades do nosso tempo, destacando o emprego e os bens e serviços associados às necessidades básicas.

Neste contexto interessa analisar, ainda que brevemente, a panorâmica da situação educativa portuguesa. Esta sintetiza-se no seguinte quadro de situações:

a) elevada taxa de analfabetismo ($\simeq$23%);
b) baixa taxa de escolarização do ensino pré-escolar ($\simeq$12%);
c) insuficiente cobertura da escolaridade obrigatória ($\simeq$70% da população escolarizável);
d) baixa duração média da escolaridade obrigatória (6 anos);
e) baixa produtividade geral do ensino com taxas de repetência elevadas;
f) disparidades regionais acentuadas, reveladas quer pelas taxas da repetência, quer pelas de abandono;
g) rede escolar com muitas insuficiências;
h) deficiente equipamento de muitos estabelecimentos de ensino;
i) número escasso de professores profissionalizados;
j) recursos financeiros insuficientes postos à disposição do sector;
l) inexistência generalizada de cursos profissionais médios;
m) grandes assimetrias quanto a frequência e proveniência sócio-económica da juventude universitária;
n) discreto financiamento da investigação científica e tecnológica ($\simeq$0,35% do PIB);
o) escasso potencial humano científico-tecnológico do país (cerca de 2,7 investigadores por 10 000 habitantes);
p) fraca participação do sector empresarial nas actividades de I,D&D.

Convirá ter presente que cerca de 45% dos jovens não completa o 9.º ano de escolaridade e que cerca de 67% dos jovens não prossegue os seus estudos para além do 9.º ano. Apenas 8 a 10% dos jovens segue estudos superiores.

Temos uma situação pouco invejável em todos os níveis de ensino, desde o primário, pelo secundário até ao terciário. Pode discutir-se por onde começar, se pelo primário, base de todo o edifício, se pelo terciário procurando impulsionar rapidamente o desenvolvimento técnico-científico do país, suporte de políticas industrial, agrícola, sanitária, etc. coerentes, se pelo secundário terminal que apresenta lacunas graves entre nós.

Creio que as três frentes têm de ser cuidadas simultaneamente já que a delicadeza da situação e a eminência de roturas graves a isso obrigam.

O Ministério da Educação publicou em 1981 um estudo sobre a «estratégia de desenvolvimento dos recursos humanos». Este estudo foi elaborado em colaboração com o Banco Mundial. Procurou-se determinar as necessidades da mão-de-obra e a evolução do mercado de trabalho no nosso país para o período 1980-1992.

Usou-se o chamado «Modelo integrado de previsão das necessidades de mão-de-obra». Trata-se de um modelo computorizado que usa indicadores dos sistemas económicos e educacional bem como da oferta e da procura de mão-de-obra.

O bloco económico foi projectado com base no PIB por sectores de actividades e na produtividade média da mão-de-obra no ano de base. O bloco educacional faz o acompanhamento de cerca de 1200 grupos de alunos (100 cursos $\times$ 2 sexos $\times$ 6 grupos etários) ao longo do sistema escolar. A simulação do mercado de trabalho baseia-se nos «outputs» de blocos anteriores que dão os fluxos que afectam as disponibilidades de mão-de-obra para o ano base.

O modelo usado baseia-se na matriz do emprego por sectores de actividade e por grupos profissionais e na afectação dos alunos provenientes do sistema educativo a essa matriz.

As projecções realizadas tiveram a tripla preocupação seguinte:

— manter um ritmo de crescimento do PIB a

QUADRO I

Comparação entre emprego potencial e emprego efectivo em 1992

NÍVEIS DE PROFISSÕES	Emprego efectivo (1) 10^3	Emprego potencial (2) 10^3	Excesso (+) Défice (—) (1) — (2) 10^3
Pessoal superior científico e técnico	21,5	23,4	−1,9
Engenheiros e Arquitectos	34,6	41,7	−7,1
Direito, Contabilidade e Economistas	36,0	48,5	−12,5
Professores	109,9	126,0	−16,1
Outro pessoal superior	32,1	33,3	−1,2
Quadros médios	85,3	123,3	−38,0
Empregados altamente qualificados	413,1	625,8	−212,7
Trabalhadores manuais altamente qualificados	228,4	347,1	−118,7
Empregados qualificados. Nível intermédio	190,7	190,7	*
Operários qualificados. Nível intermédio	252,1	251,1	*
Empregados semi-qualificados e trabalhadores agrícolas	161,1	219,1	*
Operários semi-qualificados	788,5	1079,9	−58,4
Não qualificados	424,3	424,3	−291,4

* Possíveis excedentes de mão-de-obra.
Fonte: REIS A. (1981).

QUADRO II

Ensino Politécnico (valores médios anuais)

CURSOS	«outputs» em 1981	«outputs em 1992 com manutenção da política actual	«outputs» para satisfazer as necessidades de mão-de-obra em 1992
Contabilidade e Administração	348	451	650 a 750
Administração Pública	—	—	1 000 a 2 000
Agronomia	—	—	600 a 700
Eng.ª Alimentar	74	97	350 a 450
Eng.ª Têxtil	8	17	300 a 400
Artes Gráficas	—	—	100 a 150
Eng.ª Mecânica	218	309	800 a 1 000
Eng.ª Electrónica e Telecomunicações	270	357	700 a 900
Eng.ª Civil	188	244	600 a 900
Eng.ª Química		48	300 a 400
Eng.ª de Pesca	—	—	50 a 100
Artes Decorativas e Design	—	—	200 a 350
Línguas e Turismo	301	391	600 a 700

Fonte: MEU (1981) Bol. Inf. n.º 14.

níveis comportáveis com a necessidade de diminuir a lacuna que nos separa das capitações europeias.

— modernizar a estrutura profissional portuguesa tendo em vista colmatar, na presente década, cerca de metade da distância que nos separa da média europeia.

— admitir que a escolaridade obrigatória passará, até ao fim dos anos oitenta, de 6 para os 9 anos.

Embora as hipóteses de partida se tenham revelado optimistas, os valores encontrados e que se apresentam são os únicos disponíveis e funcionam como indicadores desejáveis.

No Quadro I é feita a comparação entre o emprego potencial e o emprego efectivo no ano de 1992, para os diferentes níveis profissionais. Verifica-se que as carências mais acentuadas se notam nas categorias de empregados altamente qualificados e para trabalhadores manuais altamente e semi-qualificados.

O estudo referido do ME/BM calculou os «outputs» do ensino politécnico para 1992 em duas situações: mantendo-se a política educativa actual e modificando-se esta de modo a satisfazer as necessidades referidas em 1992 de acordo com os pressupostos apresentados (Quadro II).

Para o ensino secundário profissionalizante que urge generalizar no país, temos os valores do Quadro III.

Trata-se de valores médios de diplomados com os cursos profissionalizantes a criar ao nível do 9.º ano e com três anos de educação média.

Quanto ao ensino superior universitário, o relatório do Banco Mundial que temos vindo a seguir, diz que as taxas actuais permitirão a satisfação quantitativa das necessidades de mão-de-obra durante a década de 80 e princípios de 90, salvo os casos que se referem a seguir. Assim, se não houver melhor redistribuição e utilização dos engenheiros agrónomos, haverá excedentes no final da década de 80. Poderá também haver excedentes em engenharia química, electrónica e ciências naturais. O maior excedente, todavia, verificar-se-á entre os médicos.

Os maiores défices serão nos seguintes casos:

— professores do ensino secundário e universitário — 15 a 36 000
— gestores de empresas — 12 a 16 000
— engenharia civil e arquitectura — 2,5 a 4 500

2 — A I,D&D NACIONAL E O DESENVOLVIMENTO

Vive-se na época da investigação científica. As nações que ocupam a vanguarda do desenvolvimento e que pontificam politicamente procuram ter e «fazer» cientistas. É assim que o *Homo investigans* é um recém-chegado. É uma sub-espécie do *Homo sapiens sapiens* gerado pela revolução industrial e que tem como ambiente privilegiado a civilização tecnotrónica que estamos vivendo. Não esqueçamos que estão vivos 90% de todos os investigadores que houve no mundo desde a antiga Grécia.

O conhecimento científico e técnico em um país e a maneira como é usado nos processos de produção constituem elementos de poder que se reflectem nas relações desse país com os restantes. A superioridade ou a dependência científico-tecnológica têm significado político e são factores fundamentais do exercício do poder.

A capacidade de uma sociedade em assimilar, adaptar, melhorar e criar conhecimento em actividades produtivas baseia-se em três pressupostos interdependentes:

O primeiro diz respeito ao conhecimento científico e técnico que essa sociedade possui e ao modo como o usa para fins produtivos. O segundo refere-se à disponibilidade em recursos humanos treinados capazes de compreender e usar eficazmente aqueles conhecimentos nas suas actividades. O terceiro envolve a estrutura e a eficiência das instituições ligadas ao progresso científico e técnico e às suas aplicações nas actividades económicas e sociais, nomeadamente as Universidades, os Laboratórios Nacionais de investigação científica e tecnológica, os departamentos governamentais reguladores, orientadores e financiadores das actividades de I,D&D e as empresas.

A aplicação desta principiologia de modo a que a Ciência e a Tecnologia se tornem instrumentos de desenvolvimento económico e social da nação, supõe que o país tenha infraestrutura científico-tecnológica adequada, suporte de capacidade científico-tecno-

QUADRO III

CURSOS	«Outputs» para satisfazer as necessidades de mão-de-obra em 1992 (valores médios anuais)
Contabilidade e Administração	12 000 — 15 000
Administração Pública	9 000 — 15 000
Construção Civil	1 700
Química	1 600
Máquinas	2 800
Electricidade	1 800
Design industrial e Comercial	600
Artes decorativas e marcenaria	450
Artes gráficas	250
Línguas, hotelaria, turismo, etc.	850
Pesca	500

Fonte: MEU (1981) Bol. Inf. n.º 14.

QUADRO IV

Evolução do número de prémios Nobel

PAÍS	FÍSICA		QUÍMICA		MEDICINA	
	Ante 1940	Pós 1940	Ante 1940	Pós 1940	Ante 1940	Pós 1940
França	6	2	6	0	3	4
Inglaterra	10	10	6	15	7	14
Alemanha	10	3	15	8	8	3
Estados Unidos	6	40	3	23	6	51
União Soviética	0	7	0	1	2	0

Fonte: Le Monde Aujourd'hui, 14-10-1984.

lógica. Esta capacidade exige recursos de vário tipo, a saber: humanos, financeiros e institucionais. Se os dois primeiros tipos de recursos são fáceis de avaliar, os institucionais englobam os níveis do planeamento, da coordenação, da promoção e da realização de actividades de I,D&D.

Este facto foi muito recentemente posto em evidência em um suplemento científico do jornal francês «Le Monde» que, para ilustrar a «fraqueza» da competitividade francesa no mundo tecno-científico publicava o Quadro IV que mostra bem como no após guerra a Europa tradicionalmente mãe-científica se deixou marginalizar.

É que a dependência científico-tecnológica paga-se caro pois se traduz na perda do controlo na decisão da programação, produção e mercado, na importação não apropriada de conhecimentos e na perda de poder de negociação na aquisição de tecnologia.

Os três pontos explicitados: conhecimento científico e técnico disponível, recursos humanos treinados, estrutura institucional são pressupostos básicos que nos permitirão procurar perspectivar e prospectivar o caso português.

A consideração dos três pontos referidos tem de se relacionar com a política tecnológica industrial e energética definida até ao fim do presente século. Os principais vectores de tal política aparecem mencionados em documentos oficiais como o Plano de Desenvolvimento Tecnológico da Indústria Transformadora portuguesa e o Plano Energético Nacional. São eles:

— reforço da infraestrutura científica e tecnológica industrialmente orientada;
— apoio à modernização, aumento de produtividade, melhoria da qualidade e inovação dos sectores industriais tradicionais bem como o desenvolvimento de novas tecnologias para o uso mais racional da energia;
— aquisição, demonstração e desenvolvimento de tecnologias avançadas;
— maximização do uso dos recursos naturais nacionais;
— acompanhamento da evolução internacional das diversas tecnologias e suas aplicações;
— criação de mecanismos financeiros, fiscais e institucionais de apoio à inovação industrial e uma melhor ligação entre as Instituições de Investigação e a Indústria.

O Plano de Desenvolvimento Tecnológico da Indústria Transformadora portuguesa está dividido em seis programas de que apenas citaremos o primeiro: Reforço das capacidades científicas e tecnológicas com ênfase na Investigação e Desenvolvimento do sector produtivo.

Embora este programa exija participação intensa do Estado, são esperadas acções relevantes de I,D&D nas empresas privadas. Todavia este programa supõe a atribuição de uma percentagem mais significativa do PNB às actividades de I,D&D orientadas para o desenvolvimento económico procurando-se atingir valores aceitáveis a nível dos padrões internacionais. Prevê-se que os gastos de investigação e desenvolvimento industrialmente orientados passem do valor actual de 0,12 do PNB para 0,40% no espaço de uma década.

O financiamento global dos programas referidos terá uma componente de 60% proveniente do Estado e de 40% proveniente da Indústria.

Servindo-nos dos valores globais disponíveis sobre recursos humanos em I,D&D publicados pela JNICT em 1983, verificamos que em 1980, em termos de equivalência a tempo integral (ETI), aqueles recursos tinham as seguintes distribuições (Quadro V);

QUADRO V

Sector de execução	ETI	%
Estado	3 711,3	48,1
Ensino superior	2 378,3	30,9
I.P.s/F.L.	202,1	2,6
Empresas	1 419,2	18,4
TOTAL	7 710,9	100,0

I.P.s/F.L. = Instituições Privadas s/fins lucrativos.
Fonte: JNICT (1983) Est. Doc. Ciên. & Tecnologia n.º 2.

Se agora procurarmos discriminar estes 7710,9 ETI por funções exercidas, temos os valores do Quadro VI.

Verifica-se que 34,5% correspondem à função de investigador, 37,2% são técnicos e os restantes 28,3% são operários.

Um facto relevante a reter da análise dos Quadros V e VI refere-se à modéstia, em termos relativos, dos efectivos de I,D&D no sector Empresas devido ao discreto número de investigadores quando comparados com os números correspondentes dos sectores do Estado e Ensino Superior.

Averiguando quais as qualificações dos recursos humanos em I,D&D obtêm-se os valores do Quadro VII

Este quadro permite ter uma visão bimodal dos recursos humanos adstritos à I,D&D. Assim temos a distribuição percentual pelos quatro sectores aí referidos e ainda a distribuição por qualificações.

Os três quadros apresentados (Quadros V, VI e VII) podem sintetizar-se em termos percentuais como se aponta no Quadro VIII. A complementá-lo estão os valores do Quadro IX em que os recursos humanos aparecem desagregados por domínios científicos e tecnológicos.

Valerá a pena considerar o Quadro X onde se fazem algumas comparações entre países europeus.

Para se ter uma noção mais exacta das assimetrias da I,D&D no nosso país convirá atentar nos valores do Quadro XI onde o país aparece dividido em quatro grandes áreas.

Procurando mostrar um panorama razoavelmente actual, geral e funcional de recursos humanos nacionais apresentam-se os quadros seguintes (Quadros XII a XV). Aí aparecem a distribuição dos recursos finan-

QUADRO VI

Sector de execução / Função	Estado	Ensino Superior	I.P.s/F.L.	Empresas	TOTAL
Investigadores	836,2	1 380,2	71,2	375,0	2 662,6
Técnicos	1 678,4	549,0	64,7	574,9	2 867,0
Operários	721,8	289,1	31,0	} 469,3	} 2 181,3
Administrativos	474,9	160,0	35,2		
TOTAL	3 711,3	2 378,3	202,1	1 419,2	7 710,9

Fonte: idem Quadro V.

QUADRO VII

Sector de execução / Qualificação	Estado	Ensino Superior	I.P.S./F.L.	Empresas	TOTAL	%
Curso Superior	1 454,0	1 549,6	121,9	375,0	3 500,5	45,4
Curso médio	1 060,6	379,6	14,0	574,9	2 029,1	26,3
Outros *	1 196,7	449,1	66,2	469,3	2 181,3	28,3
TOTAL	3 711,3	2 378,3	202,1	1 419,2	7 710,9	100
%	48,1	30,9	2,6	18,4	100,0	

Fonte: idem Quadro V. * Vidé nota Quadro VIII.

QUADRO VIII

	Estado %	Ensino Superior %	I.P.s/F.L. %	Empresas %
FUNÇÃO				
Investigadores	22,5	58,0	35,2	26,0
Técnicos	45,2	23,1	32,0	41,0
Operários	19,5	12,2	15,3	33,0
Administrativos	12,8	6,7	17,5	
QUALIFICAÇÃO				
Curso superior	39,2	65,2	60,3	26,4
Curso médio	28,6	16,0	6,9	40,5
Outros *	32,2	18,8	32,8	33,1

* Pessoal com estudos secundários incompletos, operários especializados ou não.

Fonte: idem Quadro V.

QUADRO IX

Domínio Científico ou Tecnológico	Estado %	Ensino Superior %	I.P.s/F.L. %	Empresas %
Ciên. Exactas e Naturais	17,2	42,9	70,1	4,5
Ciên. da Engenharia	24,9	12,2	7,4	71,0
Ciên. da Saúde	11,6	22,1	6,4	22,9
Ciên. da Agricultura, Silvicultura, Pecuária e Pescas	30,4	7,6	0,1	0,4
Ciênc. Sociais e Humanas	15,9	15,2	15,9	1,2

Fonte: idem Quadro V.

QUADRO X

Pessoal de I&D em ETI, dados referentes a 1977

PAIS	Pessoal em I&D (ETI)		Graduados Universitários % do total
	Total	‰ da força laboral	
R. Fed. da Alemanha	319 434	12	23
Bélgica	29 532	7	31
Dinamarca	13 801	5	39
França	222 111	10	não disponível
Holanda	52 857	11	28
Irlanda	5 857	5	não disponível
Itália	97 345	5	37
Portugal	6 543	2	44

Fonte: Situação do sistema científico e tecnológico português MCCC (1982).

QUADRO XI

I, D&D por regiões do país (1978)

Regiões	PIB %	Pessoal (ETI) %
Distritos Entre-Douro e Minho	11	16
Distritos Entre-Douro e Tejo (salvo Lisboa)	12	20
Grande Lisboa	72	59
Alentejo, Algarve e regiões autónomas dos Açores e Madeira	5	5
	100	100

Fonte: KIM, H.K. (1982).

ceiros para 1983 que contemplaram os principais laboratórios nacionais estatais (Quadro XII) e a ilustração dos recursos humanos por ramos de actividade (Quadros XIII a XV). Os valores apresentados são eloquentes e falam por si, mais do que os glosar interessa que meditemos neles.

3 — CONSIDERAÇÕES FINAIS

É importante, após a quantificação que se procurou ao juntar os quadros apresentados, referir que o Plano Tecnológico identificou as áreas programáticas de alta prioridade que representam as necessidades e oportunidades tecnológicas para a indústria portuguesa.

São elas:

— Necessidade de aumentar e fortalecer a capacidade analítica nacional necessária ao desenvolvimento de uma política tecnológica.

— Necessidade generalizada de melhorar a capacidade tecnológica das empresas existentes.

QUADRO XII

Recursos financeiros dos organismo nacionais de I, D&D em 1983 (10^6 escudos)

Organismo	Orç. Ordinário	PIDDAC	TOTAL	
			10^6 escudos	%
LNETI (Energia e Tecnologia)	710	783	1 493	27,9
LNEC (Engenharia Civil)	874	327	1 201	22,5
INIAER (Agricultura)	611	171	782	14,6
INIC (Inv. universitária)	667	86	753	14,1
IICT (Inv. tropical)	336	25	361	6,8
INIP (Pescas)	127	100	227	4,3
IH (Hidrografia)	217	6	223	4,2
LNIV (Inv. veterinária)	119	53	172	3,2
JNICT (Política científica e tecnológica)	56	74	130	2,4
TOTAL	3 717	1 625	5 342	100,0

Fonte: Examens des politiques nationales de la science. Portugal. OCDE (1984).

— Necessidade de reformulação da estrutura fiscal mais apropriada à incentivação do desenvolvimento tecnológico.

— Necessidade de introduzir novas tecnologias e novas firmas de base tecnológica.

— Necessidade em apostar no aumento das capacidades nacionais nos domínios da metrologia, microelectrónica, ciências dos materiais e na biotecnologia.

— Necessidade de melhorar o capital humano que está na base do processo de desenvolvimento tecnológico.

QUADRO XIII

Recursos humanos em I, D&D, por função e por ramo de actividade económica (1982)

RAMO DE ACTIVIDADE	Investigadores ETI	Técnicos (1) ETI	Auxiliares ETI	Total ETI
Extracção de minérios metálicos	6,25	23,5	31,3	61,05
Alimentação, bebidas e tabaco	13,78	8,01	5,97	45,65
Madeira e Cortiça	0,67	1,67	0,33	2,67
Papel e Artes Gráficas	3,0	2,8	3,2	9,0
Ind. Químicas dos derivados do petróleo e do carvão	79,08	105,25	125,7	310,03
Produtos farmacêuticos	15,85	10,5	11,5	37,85
Ind. prod. minerais não metálicos	5,7	18,66	60,49	84,85
Ind. Metalúrgicas de base	20,28	1,54	5,0	26,82
Fab. produtos metálicos	6,95	9,25	1,8	18,0
Máquinas não eléctricas	10,0	26,4	24,76	61,16
Máquinas e aparelhos eléctricos	111,5	123,5	103,0	338,0
Material de transportes	56,0	106,0	31,0	193,0
Aparelhos de medida, fotográficos e óptica	3,83	6,0	3,0	12,83
Electricidade, gás e vapor	182,0	124,0	46,0	352,0
Construções e Obras Públicas	—	2,0	3,0	5,0
Comunicações	53,0	28,0	36,0	117,0
Serviços prestados às Empresas	20,4	8,0	3,0	31,4
	584,34	620,56	519,18	1 734,08

(1) Com curso secundário ou equivalente.

Fonte: I&DE. Dados de actualização a 31-12-82. Valores provisórios. JNICT (1984).

QUADRO XIV

Recursos humanos em actividades de Controlo de Qualidade, por função e por ramo de actividade económica (1982)

RAMO DE ACTIVIDADE	Técnicos com Curso superior ETI	Técnicos ETI	Auxiliar ETI	TOTAL ETI
Ext. de minérios metálicos	2,0	2,0	11,0	15,0
Alimentação, bebidas e tabaco	37,38	67,06	122,2	226,64
Madeira e Cortiça	14,5	22,1	180,9	217,5
Papel e Artes Gráficas	1,0	2,67	4,0	7,67
Ind. Quím. deriv. petról. e carvão	65,69	272,59	177,61	515,89
Produtos farmacêuticos	18,0	33,0	40,0	91,0
Ind. prod. min. não metálicos	5,8	16,3	80,47	102,57
Ind. Metalúrgicas de base	5,0	6,0	369,0	380,0
Fab. produtos metálicos	5,0	—	—	5,0
Máquinas não eléctricas	3,86	26,75	31,5	62,11
Máquinas e aparelhos eléctricos	24,0	110,25	130,5	264,75
Material de transportes	16,0	68,0	0,5	84,5
Aparelhos medida, fotog. e óptica	1,0	9,98	35,0	45,98
Electricidade, gás e vapor	80,0	94,0	24,0	198,0
Construções e Obras Públicas	1,0	5,0	—	6,0
Comunicações	18,0	1,3	3,0	22,3
Serviços prestados às Empresas	22,8	52,1	2,0	76,9
	322,72	792,8	1 235,13	2 350,66

Fonte: I&DE. Dados de actualização a 31-12-82. Valores provisórios.
JNICT (1984).

QUADRO XV

Recursos humanos em actividades científicas excluindo Controlo de Qualidade, por função e por ramo de actividade económica (1982)

RAMO DE ACTIVIDADE	Técnicos com Curso superior ETI	Técnicos ETI	Auxiliares ETI	TOTAL ETI
Extracção de minér. metálicos	12,16	11,13	34,29	57,58
Alimentação, bebidas e tabaco	19,31	46,8	11,15	71,26
Madeira e Cortiça	1,9	8,0	0,6	10,5
Papel e Artes Gráficas	3,4	3,0	—	6,4
Ind. Quím. deriv. petróleo e carvão	2,65	1,4	3,45	7,5
Produtos farmacêuticos	131,65	193,12	101,3	426,07
Ind. prod. min. não metálicos	8,0	51,0	172,0	231,0
Ind. Metalúrg. de base	0,64	2,4	88,21	91,25
Fab. produtos metálicos	35,76	10,14	1,2	47,1
Máquinas não eléctricas	3,05	4,75	7,2	15,0
Máquinas e aparelhos eléctricos	3,75	20,3	7,5	31,55
Material de transportes	37,0	55,0	27,0	119,0
Apar. med., fotog. e óptica	7,0	3,0	1,0	11,0
Electricidade, gás e vapor	83,0	81,0	26,0	190,0
Const. e Obras Públicas	2,0	4,0	—	6,0
Comunicações	92,25	32,35	13,0	137,6
Serviços prestados às Empresas	257,3	436,5	173,5	867,3
TOTAL	700,82	957,89	667,4	2 326,11

Fonte: I&DE. Dados de actualização a 31-12-82. Valores provisórios.
JNICT (1984).

Devem estas seis necessidades básicas ser satisfeitas para que o país entre na via de um desenvolvimento harmonioso. O suporte humano é essencial, para obviar a estas necessidades e há que aproveitar as oportunidades que elas nos põem, procurando:

— Criar um conjunto de organizações que acompanhem o desenvolvimento tecnológico em Portugal e no estrangeiro, identificando as necessidades e oportunidades tecnológicas e desenvolvendo as acções oportunas.
— Melhorar a produtividade e a qualidade dos produtos e o desenvolvimento de novas tecnologias através da actividade de normalização e certificação de qualidade, do estabelecimento de centros tecnológicos e de uma melhor colaboração entre as universidades, os laboratórios nacionais e a indústria promovendo uma criteriosa transferência de tecnologia.
— Promover a inovação inclusivamente pela criação de um organismo, que a incentive, tipo agência para o desenvolvimento de tecnologias de ponta.
— Difundir a informação técnica de modo a provocar o arranque de empresas de base tecnológica acentuada.
— Perspectivar o apoio no uso dos recursos naturais do país procurando cobrir campos cruciais para o nosso desenvolvimento no contexto da inserção no mundo fortemente tecnotrónico.
— Formar pessoal técnico a todos os níveis, gestores de tecnologia e trabalhadores especializados, tudo gente capaz de responder aos desafios da civilização não só actual, mas que se antevê para amanhã.

O esforço para melhorar a qualidade dos recursos humanos do país terá que ser muito grande. Por um lado, precisamos de empresários e gestores profissionais com formação em engenharia ou pelo menos técnica, capazes de gerir actividades inovadoras. Por outro lado urge incrementar a preparação dos trabalhadores nos seus locais de trabalho de modo a aumentarmos o número de técnicos e de operários especializados. Só procurando a satisfação dos pontos acima mencionados, a transferência de tecnologia será via transitória para independência nacional e não via permanente para subordinação ao exterior.

Recordamos que uma das causas determinantes da nossa falta de desenvolvimento tecnológico está na escassez de I,D&D a suportá-lo. Acresce que só cerca de 13% da I,D&D portuguesa é de iniciativa do sector industrial privado enquanto que cerca de 66% é de iniciativa do governo. Mostram os factos que nos países industrializados a I,D&D privada está mais ralacionada com o crescimento económico que a I,D&D estatal.

Um estudo envolvendo cem empresas nacionais de diferentes tamanhos e referente a 1981 e 1982 mostra que estas empresas se repartiam pelos seguin-

tes níveis tecnológicos de acordo com os valores percentuais do Quadro XVI.

QUADRO XVI

Níveis	Percentagem
1	7
2	16
3	31
4	26
5	20

Fonte: Plano de Desenvolvimento Tecnológico da Indústria Transformadora Portugesa. Conclusões e Recomendações LNETI (1983).

Os níveis são caracterizados como segue:

Nível 1: Empresas que têm actividades de I&D e engenharia (com departamentos próprios), que podem desenvolver novos produtos e processos e introduzir alterações importantes em produtos e processos já existentes.

Nível 2: Empresas só com departamentos de engenharia e que podem introduzir modificações importantes em produtos e processos (geralmente com tecnologia adquirida no exterior).

Nível 3: Empresas com pouco pessoal técnico e que podem apenas introduzir pequenas alterações em produtos e processos (com tecnologia adquirida).

Nível 4: Empresas com orientação tecnológica mas sem capacidade interna para além de operarem competentemente a tecnologia que possuem (se uma fábrica subsidiária de uma multinacional for indexada ao nível 4 isto pode querer dizer, por exemplo, que apenas procede à montagem dos seus produtos em Portugal, com tecnologia importada, de forma a tirar partido do preço vantajoso de mão-de-obra).

Nível 5: Empresas nos sectores tradicionais e sem grande interesse por melhoramentos tecnológicos.

A vantagem que a economia nacional tem tido, decorrente da mão-de-obra barata, tende a esbater-se. Resulta daqui que a rendibilidade da produção será o factor determinante da competitividade dos novos produtos nos mercados internacionais. A desvantagem em relação aos países estrangeiros só pode ser vencida com o aumento da capacidade inovadora do país.

Entende-se por inovação a aplicação de uma invenção ao processo produtivo ou à estruturação de um serviço. Ou dito de outra forma, é a arte de associar elementos pré-existentes para criar novas formas, produtos ou processos comercializáveis. A inovação, exige enorme esforço de gente capaz de tomar as invenções e as passar ao processo produtivo e em tal acção promover o desenvolvimento da nação.

Entende-se por desenvolvimento a evolução global de uma colectividade — no geral uma nação — para uma direcção positiva permitindo a satisfação equitativa das necessidades físicas, psíquicas, culturais e morais das gentes. Esta perspectiva de desenvolvimento supõe que o Homem é o valor supremo e o fim da História e que a Ciência e a Técnica têm funções meramente instrumentais.

Nesta perspectiva o fortalecimento dos recursos humanos do país é a prioridade das prioridades.

BIBLIOGRAFIA

AIRES-BARROS, L. (1983) — Ensino técnico terminal. A realidade dos números e as necessidades do país. Brotéria, vol. 117, pp. 262-279 e 375-395.

BERTELMAN, T. et al (1980) — Resources Society and the future. Pergamon press Oxford.

KIM, H. K. (1982) — Assessment of scientific and technological infrastructure in the Republic of Portugal with particular reference to education and training of scientific and technological personnel. Lisboa.

REIS, A. (1981) — Formação técnico-profissional e universitária. LNETI. Lisboa.

REYNOLDS, A. (1984) — Technology transfer. Residel Publ. Co. Boston.

RICHARDSON, J. (1979) — Integrated technology transfer. Leomond Maryland.

ROCHA, M. (1962) — A reforma do ensino da engenharia. Comunicação n. 53. Congresso do Ensino de Engenharia, vol. 1. Lisboa.

SOARES, M. C. et al (1981) — Procura social do ensino Bol. inf. n. 13 MEU. Lisboa.

——(1981) — Estratégia de desenvolvimento dos recurso humanos. Bol. Inf. n.° 14. MEU. Lisboa.

——(1982) — Situação do sistema científico e tecnológico português. Ministério da Cultura e da Coordenação Científica. Lisboa.

——(1982) — Propositions pour une strategie scientifique et techniques européennes. Commission des Communautés Européennes. Bruxelles.

——(1982) — Workshop on the management of research for economic development. JNICT/NAS/USAID. Lisboa.

——(1983) — Plano de Desenvolvimento Tecnológico da Indústria Transformadora Portuguesa. Síntese. LNETI. Lisboa.

——(1983) — Plano de Desenvolvimento Tecnológico da Indústria Transformadora Portuguesa. Conclusões e Recomendações. LNETI. Lisboa.

——(1983) — Recursos da Ciência e Tecnologia. Portugal 1980. JNICT. Lisboa.

——(1984) — Examens des politiques nationales de la science. Portugal Rapport général (Partie I). Rapport des examinateurs. (Partie II). Lisboa.

——(1984) — I&DE. Dados de actualização a 31-12-1982 Valores provisórios. JNICT. Lisboa.

DIAGRAMAS POTENCIAL — PH

C. A. C. SEQUEIRA
Laboratório de Electroquímica, Instituto Superior Técnico, Lisboa

RESUMO

Uma das contribuições mais importantes das últimas décadas para a compreensão dos fenómenos de corrosão metálica deve-se a Pourbaix e seus colaboradores que construiram diagramas de equilíbrio termodinâmico (potencial-pH) para o estudo sistemático da previsão das reacções de metais em soluções aquosas. Neste artigo estabelecem-se estes diagramas por uma via simplificada, baseada no uso directo da equação de Nernst, método que se tem mostrado particularmente adequado na introdução do assunto aos estudantes. Faz-se ainda referência ao emprego e limitações dos diagramas, bem como a alguns exemplos de sistemas de carácter industrial.

ABSTRACT

One of the most important contributions to corrosion science and engineering in recent decades has been the work of Pourbaix and associates in the development of termodynamic equilibrium diagrams (potential vs pH) for the behaviour of metals in aqueous solutions. The author presents herein a simplified procedure for constructing these diagrams, based on the direct use of the Nernst equation, which has been successful in presenting the subject to students. Applications and limitations of the Pourbaix diagrams, as well as some examples of systems with technological interest are also given herein.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas mais importantes que se põem em Corrosão, consiste na selecção de materiais técnicos que vão ser usados em contacto com meios aquosos, em processos tecnologicamente importantes. A aprovação ou recusa de um determinado material deve decidir-se em função da velocidade de dissolução desse material no meio em que vai ser usado. Em geral, porém, e para evitar tentativas inúteis e anti-económicas, é costume começar por se recorrer à termodinâmica pois esta permite prever o sentido possível das reacções de dissolução e de redução, que constituem o processo corrosivo. Note-se que o método termodinâmico não permite senão prever, isto é, afirmar quando uma reacção é possível ou impossível, sem poder garantir, naquele caso, que ela realmente se dê. Contudo estes conhecimentos são, por si só, suficientemente importantes e úteis para a abordagem inicial do problema da selecção de materiais.

O estabelecimento do sentido da evolução provável de uma reacção electroquímica, por via termodinâmica, pode atingir-se por diversos caminhos, mas é vulgar escolher como grandezas que melhor se prestam para representar as condições de evolução das reacções electroquímicas e as respectivas funções de estado, o potencial (ou tensão) reversível de elécrodo e a energia livre duma reacção. Fixa-se então o sentido da evolução daquelas pelo sentido de variação da energia livre que as caracteriza. Se $\Delta G < 0$ para

Original recebido para publicação em 22/3/84.

um processo corrosivo, então a corrosão do metal verifica-se espontaneamente. Isto equivale a dizer que a tensão (ou potencial) do sistema metal/meio subiu acima do seu valor de equilíbrio. Efectivamente, se $G \rightarrow G'$, tal que $\Delta G = G' - G = nF\ (E - E') < 0$, então $E \rightarrow E'$ e $\Delta E = E' - E > 0$, c.q.d.

Para os sistemas electroquímicos em que um ou mais dos seus constituintes estão envolvidos em diversos tipos de equilíbrio, é extremamente útil recorrer aos métodos gráficos porque é então possível estabelecer o diagrama referente a todas as condições prováveis de evolução dos constituintes do sistema perante todo o conjunto de circunstâncias que afectam os factores internos dos equilíbrios, desde que os factores externos (P e T) se mantenham constantes. Diversos diagramas têm sido estabelecidos por diversos modos. Dentre estes destacam-se os diagramas devidos a Marcel Pourbaix [1] que se destinam essencialmente a pôr em evidência a influência dos iões H^+ sobre os equilíbrios. Inúmeros são os problemas que os diagramas permitem resolver, de Química Analítica, Electroquímica, Química Inorgânica, etc., mas a sua principal importância resulta da forte contribuição que trouxeram ao estudo da Corrosão Metálica. Neste domínio, como é óbvio, o estudo da influência dos iões H^+ sobre os equilíbrios reveste-se de especial significado prático visto que grande parte dos sistemas electroquímicos de interesse tecnológico são do tipo metal/solução aquosa, em que estão presentes os iões H^+ os quais, dadas as propriedades que lhes são peculiares, têm acção preponderante sobre a tensão de eléctrodo. As representações gráficas de Pourbaix baseiam-se no princípio termodinâmico exposto inicialmente; tais representações permitem englobar sistematicamente num único diagrama, todos os estados de oxidação-redução referentes a todas as formas oxidadas e reduzidas, que um mesmo elemento químico pode formar com dado reagente. Estes diagramas são construídos de modo que cada linha — uma recta — represente condições de equilíbrio entre duas formas, apenas, do sistema global; estes equilíbrios podem ser do tipo ácido-base ou do tipo oxidação-redução. Resulta que o encontro de linhas com formas comuns, delimita zonas de estabilidade de cada uma delas; esta constitui uma das particularidades mais importantes destes diagramas.

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

A construção dum diagrama E-pH, a 25° C, implica a representação de equações do tipo:

$$E = E^\circ + \frac{0{,}0591}{n} \log \frac{(0)^a}{(R)^c} - \frac{0{,}0591b}{n}\ pH$$

e

$$\log \frac{(D)^c}{(A)^a} = \log K - b\ pH$$

que caracterizam, respectivamente, equilíbrios electroquímicos do tipo:

$$a\ 0 + b\ H^+ + ne = c\ R + dH_20$$

e equilíbrios químicos do tipo:

$$a\ A + b\ H^+ = c\ D + dH_20$$

onde b e d são geralmente inteiros e dígitos podendo ser positivos ou negativos; a, c e n são sempre números positivos geralmente inteiros e quase sempre dígitos. Note-se que se fizeram intervir os electrões no 1.° membro da reacção electroquímica a fim de respeitar a Convenção Europeia de Sinal, convenção essa que é adoptada ao longo deste artigo. Observe-se ainda que se considerou a actividade da água constante, isto é, supõe-se tratar-se de soluções suficientemente diluídas.

A representação linear das equações escritas acima faz-se fixando previamente uma relação, arbitrariamente escolhida, para os quocientes $(0)^a / (R)^c$ e $(D)^c / (A)^a$. Há portanto famílias de rectas correspondentes aos diversos valores destes quocientes. Esta representação oferece a vantagem de poder traduzir as variações de E (ou de pH) quando se fazem variar aqueles quocientes e ainda a de mostrar que cada zona do plano E-pH delimitada por rectas representativas de equilíbrios em que intervém um mesmo constituinte representa também além da estabilidade a predominância desse constituinte. Cada ponto do plano possui três coordenadas, duas de referência aos eixos ortogonais e uma terceira em relação às rectas fronteiras de cada domínio; assim uma forma predominará tanto mais sobre as outras quanto mais afastado se encontrar o ponto representativo do sistema das linhas fronteiras do domínio. Com efeito, considerando a concentração 10^{-6} moles/litro como limite de detecção analítica corrente para as formas dissolvidas, a distância entre cada linha correspondente à variação de 10 unidades das concentrações molares, é de 0,0591/z volt, para os iões de valência z à temperatura de 25° C, donde resulta que a variação das actividades desde 1 molar até 10^{-6} molar ocupe dimensões do plano geralmente restritas em relação à área de cada domínio. A zona correspondente à estabilidade dum dado constituinte delimitada pelas linhas de concentração 10^{-6} molar, representa pois também o domínio de predominância da forma respectiva.

Feitas estas considerações representemos sucessivamente no plano E-pH as linhas correspondentes aos diversos equilíbrios susceptíveis de ocorrer nos sistemas do tipo metal-solução aquosa.

Reacções electroquímicas dependentes do pH

A representação das rectas correspondentes aos equilíbrios de oxidação-redução em que intervêm os

iões H^+ ou OH^- pode fazer-se por uma família de linhas oblíquas paralelas cuja inclinação será função do coeficiente estequiométrico que afecta o H^+ ou o OH^- na reacção e do número de electrões postos em jogo, e cuja posição face ao eixo dos potenciais dependerá da actividade dos diferentes constituintes, ionisados, ou não, que tomam parte na reacção.

Como exemplos destas reacções podemos apontar os seguintes:

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$$

$$Fe(OH)_3 + 3H^+ + e = Fe^{2+} + 3H_2O$$

$$2H^+ + 2e = H_2$$

$$E = +1{,}507 - 0{,}0946\ pH + 0{,}0118 \log \frac{(MnO_4^-)}{(Mn^{2+})}$$

$$E = +1{,}057 - 0{,}1773\ pH - 0{,}0591 \log (Fe^{2+})$$

$$E = 0{,}000 - 0{,}0591\ pH - 0{,}0295 \log p_{H_2}$$

Observe-se que estas famílias de linhas se reduzem a linhas apenas nos casos em que nas reacções não participam constituintes gasosos nem dissolvidos para além dos iões H^+, como acontece com o equilíbrio:

$$Fe(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$$

$$E = -0{,}047 - 0{,}0591\ pH$$

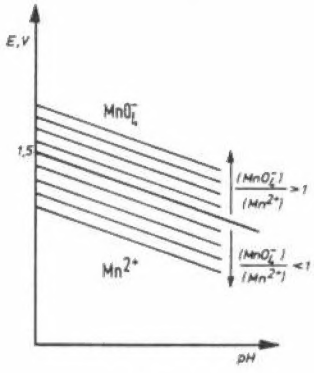


Fig. 1 Representação de equilíbrios electroquímicos dependentes do pH.

Na Fig. 1 representa-se a família de linhas correspondentes ao equilíbrio MnO_4^-/Mn^{+2}. Estas linhas dividem o plano E-pH em duas regiões: a de estabilidade termodinâmica dos iões MnO_4^- e a de estabilidade termodinâmica dos iões Mn^{2+}. Note-se que se os iões H^+ aparecessem no membro da reacção onde se encontra a forma reduzida (Mn^{2+}), o poder oxidante do sistema aumentaria com o pH.

Reacções electroquímicas independentes do pH

A representação das rectas correspondentes aos equilíbrios electroquímicos independentes do pH pode fazer-se por uma família de linhas horizontais cuja posição dependerá da actividade dos diferentes constituintes, ionisados ou não, que tomam parte na reacção. Como exemplo destas reacções podemos apontar as seguintes:

$$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$$

$$Fe^{2+} + 2\ e = Fe$$

$$Cl_2 + 2\ e = 2\ Cl^-$$

$$E = +0{,}771 + 0{,}0591 \log \frac{(Fe^{3+})}{(Fe^{2+})}$$

$$E = -0{,}440 + 0{,}0295 \log (Fe^{2+})$$

$$E = +1{,}359 + 0{,}0295 \log \frac{p_{Cl_2}}{(Cl^-)^2}$$

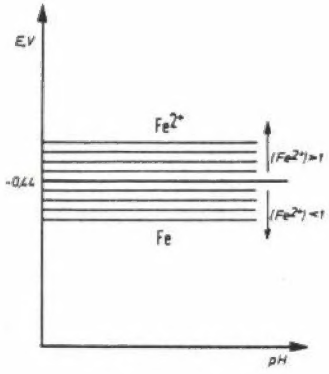


Fig. 2 Representação de equilíbrios electroquímicos independentes do pH.

Na Fig. 2 representa-se a família de linhas correspondente ao equilíbrio Fe^{2+}/Fe. Estas linhas dividem o plano E-pH em duas regiões: a de estabilidade termodinâmica dos iões Fe^{2+} e a de estabilidade termodinâmica do sólido Fe.

Reacções químicas dependentes do pH

A representação das rectas correspondentes aos equilíbrios químicos que dependem do pH pode fazer-se por uma família de linhas verticais cuja posição dependerá da actividade dos constituintes, ionisados ou não, que tomam parte na reacção.

Como exemplo destas reacções podemos apontar os seguintes:

$$HCO_3^- + H^+ = H_2CO_3$$

$$Fe(OH)_2 + 2\ H^+ = Fe^{2+} + 2H_2O$$

$$HCO_3^- + H^+ = CO_2 + H_2O$$

$$\log \frac{(HCO_3^-)}{(H_2CO_3)} = -6{,}37 + pH$$

$$\log (Fe^{2+}) = 13{,}29 - 2pH$$

$$\log \frac{p_{CO_2}}{(HCO_3^-)} = 7{,}80 - pH$$